2025年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学　専攻・　物理科学　コース

２　月　入　試　問　題
基　礎　科　目　試　験

試　験　日　：　2025 年 2月 3日(月)

試験時間　：　9時 30分 ～ 12時 30分

【注意事項】

1. 5問すべて解答すること。(各問100点)
2. 解答は各問あたり1枚の答案用紙に記入すること。(裏面使用可)
3. 答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。
4. 監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を開けないこと。
5. 試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目 ― 力学

バネにより単振動する質点に、速さに比例する大きさの抵抗が作用する場合を考える。質点の質量を m、つりあいの位置からのずれを x 、バネ定数を k、抵抗の比例係数を c として、以下の問いに答えよ。

(1) 質点が満たす運動方程式を求めよ。

(2) 抵抗がない (問い (1) の方程式で $c=0$ とする) 場合の運動の角振動数 ω_0 を求めよ。

以下、抵抗がある ($c \neq 0$) 場合について考察する。問 (1) で求めた式は $x = Ae^{\lambda t}$ を解に持つ。ここで t は時間を、e は自然対数の底（約 2.718）を表す。また、A と λ は定数である。このことを用いて、次の問いに答えよ。

(3) この特解を問 (1) の運動方程式に代入することで λ が満たす関係式を求めよ。

(4) 問 (3) の関係式を解き λ を求めよ。

ここで、抵抗はあるが、その力が弱い（cが小さい極限）場合を考える。

(5) この場合の運動の角振動数 ω_1 を求めなさい。また、ω_1 が cが小さい極限で、抵抗がない場合の角振動数 ω_0 と比べて大きくなるか、小さくなるか、理由を添えて答えよ。

(6) このときの運動の振幅が時間と共にどのように変化するか説明せよ。

(7) このときの運動をなんと呼ぶか答えよ。

2 基礎科目 ー 電磁気学

正電荷 q を持つ粒子が原点に静止しており、負電荷 $-q$ を持つ別の粒子は z 軸上を動けるとする。２つの粒子は電気双極子をなす。電磁気力以外の力は無視できるとし、真空中の透磁率と誘電率をそれぞれ μ_0 と ϵ_0 として以下の問に答えよ。

(1) 最初、負電荷粒子は位置 $(x, y, z) = (0, 0, -\ell)$ に静止していた。ただし $\ell > 0$ とする。このとき、２つの粒子によって作られる静電ポテンシャル $\varphi(x, y, z)$ を求めよ。

(2) ℓ が小さいとする近似の下で、問 (1) の静電ポテンシャルは

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q\ell z}{4\pi\epsilon_0}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2}$$

で与えられることを導け。ただし、ℓ^2 の項は無視してよく、小さな量 ϵ に対する $(1+\epsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\epsilon$ という近似を用いてよい。

(3) 問 (2) の近似した静電ポテンシャルを用いて３次元極座標で表した電場の成分、すなわち E_r, E_θ, E_ϕ を求めよ。ちなみに３次元極座標とデカルト座標との対応は、$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ であった。必要に応じて以下の３次元極座標の勾配の式も用いて良い。

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

(4) ここまでは負電荷粒子は静止しているとした。以降は負電荷粒子が z 軸上を $z = -\ell\cos(\omega t)$ と振動すると仮定する。$|\omega|$ が小さく、この動きが十分ゆっくりならば、問 (3) の結果に $\ell \to \ell\cos(\omega t)$ という置き換えを施せば新しい電場解が得られる。この場合の電場の時間微分、$\dot{E}_r$ と $\dot{E}_\theta$ を計算せよ。

(5) 負電荷粒子が z 軸上を振動する場合、電場だけではなく磁場も生成される。その磁場は３次元極座標成分 (B_r, B_θ, B_ϕ) のうちどの成分を持つと考えられるか。理由を含めて述べよ。[ヒント：動く電荷は電流と見なせる。]

(6) マクスウェル方程式より

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0\epsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}$$

である。問 (4) で計算した電場の時間微分 $\dot{\boldsymbol{E}}$ から磁場を求めよ。必要に応じて以下の３次元極座標における回転の式を用いて良い。[ヒント：問 (5) で答えた成分だ

けがあるとして計算すればよい。]

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right\}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right\}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}\boldsymbol{e}_\phi \qquad (1)$$

3　基礎科目 ー 物理数学

以下の設問に答えよ。

（１） 関数 $v(t)$ に対する次の微分方程式を考える。ここで、F と m および ω は正の定数とする。

$$m\frac{dv}{dt} = F\sin\omega t$$

(a) $t=0$ のとき $v(0)=0$ とする。$v(t)$ を求めよ。

(b) $v(t)=dx/dt$ として、$x(t)$ を求めよ。ただし、$x(0)=0$ とする。

（２） 以下の行列の固有値を求め、各固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（３）以下の定積分を $I(\lambda)$ と表す。

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda + x^2} dx$$

(a) 定積分 $I(a^2)$ を計算せよ。ただし、a は正の実数とする。

(b) 定積分 $I(\lambda)$ の λ に関する微分を求めよ。

(c) 次式を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^2} dx$$

4　基礎科目 ー 量子力学

z 方向にかけられた一様静磁場 B の中での荷電粒子（質量 m、電荷 q）の運動を考える。ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x{}^2 + (\hat{p}_y - qBx)^{\ 2} + \hat{p}_z{}^2\right]$$

のようにとる。$\hat{p}_i$（$i = x, y, z$）は運動量演算子である。

(1) y 方向および z 方向の運動量が保存することを説明せよ。

(2) $\hat{p}_j$（$j = y, z$）の固有値が $\hbar k_j$ であるとき、$\hat{H}$ の固有関数は

$$\psi(\vec{r}) \propto e^{ik_y y + ik_z z}\phi(x)$$

とおける。このエネルギー固有値が E であるとき、$\phi(x)$ の固有値方程式を求めよ。

(3) エネルギー準位 E_n（$n = 0, 1, 2, \cdots$）を求めよ。ここで、振動中心が位置 X、角振動数が ω である 1 次元調和振動子のエネルギー準位は $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ であることは自明としてよい。

以下では、x、y 方向の長さをともに L として周期的境界条件を課す。$k_y = 2\pi l/L$ であり、$l = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ をとりうる。L は十分大きいとしてよい。

(4) l の値の範囲を求めよ。

(5) 各エネルギー準位 E_n の縮退度を求めよ。

5 基礎科目 — 熱・統計力学

体積 V、粒子数 N の単原子分子理想気体が絶対温度 T の熱平衡状態にある場合を考える。この理想気体の分配関数 $Z(T,V,N)$ は次の式で与えられる。

$$Z(T,V,N)=\frac{V^N}{N!}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}$$

ここで、m は理想気体を構成する粒子の質量、k はボルツマン定数、$\hbar$ は換算プランク定数である。また、ヘルムホルツの自由エネルギー F と分配関数 $Z(T,V,N)$ の間には、$F=-kT\ln Z(T,V,N)$ が成り立つ。

(1) 理想気体の状態方程式を導け。

(2) エネルギー等分配則が成り立つことを示せ。

次に、体積 V の単原子分子理想気体が絶対温度 T、化学ポテンシャル μ の熱平衡状態にある場合を考える。この理想気体の大分配関数 $\Xi(T,V,\mu)$ は分配関数 $Z(T,V,N)$ を用いて次の式で与えられる。

$$\Xi(T,V,\mu)=\sum_{N=0}^{\infty}e^{\mu N/kT}Z(T,V,N)$$

(3) 理想気体の大分配関数 $\Xi(T,V,\mu)$ を具体的に計算せよ。

(4) 理想気体の平均粒子数 $\bar{N}$ を求めよ。

(5) 大分配関数 $\Xi(T,V,\mu)$ を平均粒子数 $\bar{N}$ を用いて表せ。

(6) 理想気体の粒子数が N となる確率を N と $\bar{N}$ を用いて表せ。

2025年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
一般入試・外国人留学生入試
基礎科目試験
（数学基礎・情報基礎）

試験日：　2025年2月3日（月）

試験時間：　9時30分　～　12時00分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4問すべてに解答し，解答には各問あたり1枚の答案用紙を使用すること。（裏面使用可）

数 学 基 礎

【1】

[1] 以下の各問いに答えよ.

(1) $\cos 1$ の近似値を小数第3位を四捨五入して小数第2位まで求めよ.

(2) 領域 $D = \{(x,y) : 1 \leq x + y \leq 2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y\}$ での重積分

$$I = \int\int_D \exp\left(\frac{x}{x+y}\right) dxdy$$

を $x = uv,\ y = u - uv$ と変数変換して求めよ.

[2] x に関する多項式の列 $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ が, 漸化式

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x$$
$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

で与えられるとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) $-2 < x < 2$ のとき $x = 2\cos\theta\ (0 < \theta < \pi)$ と変数変換すると

$$P_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

となることを示せ.

(2) $P_n(x) = 0$ となる x を全て求めよ.

(3) $m \neq n$ ならば

$$\int_{-2}^{2} P_n(x)P_m(x)\sqrt{4-x^2}dx = 0$$

となることを示せ.

【2】

[1] 写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を, 任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y+2z \\ x+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$$

と定める. また, 線形写像 $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は合成写像 $g \circ f$ が考えられ, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し $g \circ f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となり, かつ

$$g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとする. このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の核 $\mathrm{Ker}(A)$ を求めよ.

(3) m, n をそれぞれ求めよ.

(4) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ に対し, $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ となる行列 B を求めよ.

[2] $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y = z \right\}$ と $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x = 2y \\ y = z \end{array} \right\}$

について, 以下の各問いに答えよ.

(1) P と L の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(2) $P \cap L$ を求めよ.

情　報　基　礎

【1】以下の各問いに答えよ.

(1)　アナログ信号をディジタル化した後, アナログ信号に戻して忠実に再現できるために必要なディジタル化の際の周波数を示す定理の名称を答え, その内容を説明せよ.

(2)　人間の声は 0.3〜3.4kHz 程度の周波数の音声信号である. ディジタル信号の電話は音声信号をディジタル化して送信し, 受信側でアナログ信号に戻しているが, 受信側で元のアナログ音声信号を忠実に再現するためには, 送信側で何 Hz 以上の周波数でのディジタル化が必要か答えよ.

(3)　CD (Compact Disc) では人間が聞き取れる音の可聴域を元に, 44.1kHz の周波数でのディジタル化を行っているが, このことから人間の可聴域はどの程度の値であると考えられるか説明せよ.

(4)　CD では 44.1kHz の周波数で 16bit の量子化によるディジタル化を行っている. CD には 2 チャンネルの音が 70 分収録されているものとすると, 収録可能なデータ量はいくつになるか, 計算式と共に答えよ.

【2】何行何列かのマスが並んでおり, これを上の行から順に, さらに左から順に読むものとする. 各マスは黒または白の石が入っているか, 空であるとする.

これをある記法で符号化することを考える. 黒・白・空の順とし, 同じ色のマスが横に n 個並んでいることを「n」と表すこととする. ここで, ある行の右端のマスとその次の行の左端のマスは続けて並んでいるものとする. この記法により, 図1に示す1行8列のマスを「3,2,1,1,1」(黒3・白2・空1・黒1・白1) という長さ5の int 型の配列で表すことができる.

また, 1行を構成するマスが N 個であることをあらかじめ知っていれば, 例えば図2に示す2行8列のマスの状況を $N=8$ と「3,2,1,1,2,2,2,0,1,1,1」(黒3・白2・空1・黒1・白2・空2・黒2・白0・空1・黒1・白1) という長さ11の int 型の配列表すことができる.

このとき, 以下の各問いに答えよ.

●	●	●	○	○		●	○

図1：マスの状況例1

●	●	●	○	○		●	○
○			●	●		●	○

図2：マスの状況例2

○	○		●	○		○	●
●	●	○	○	○		●	○

図3：マスの状況例3

符号化プログラム

```
#define N (...)
#define M (...)

void func(int array[M][N]){

  (ここを埋める)

}
```

(1) 図3に示す2行8列のマスを符号を表す int 型の配列に変換した結果を示せ.

(2) M 行 N 列のマスが与えられて, これをこの符号化の方法で表現するとする. このとき, 符号を表す int 型の配列が最長となるのはどのようなときか, また最短となるのはどのようなときか, それぞれについて説明せよ.

(3) 上記で示した符号化プログラムは,M 行 N 列のマスが黒の石を持つ, 白の石を持つ, 空のマスである状況を表す2次元配列を引数として受け取り, その状況を符号化した符号を表す配列を文字列として printf で出力する関数 func を含む. 空欄を埋めて関数 func を完成させよ. ここで, 関数 func において引数となる二次元配列 array[M][N] は 0, 1, 2 のいずれかの値を持ち, 黒の石を持つマスを「0」, 白の石を持つマスを「1」, 空のマスを「2」として表すこととする.

(4) 1行のマスの数が8個 ($N=8$) であり, 行の数も8個 ($M=8$) であるボードゲームを考える. とある盤面での符号を表す配列を入力したときに, 黒の石と白の石の個数をそれぞれ表示するプログラムを作成せよ. 符号を表す配列 array は int 型の配列として与えられ, 配列 array の長さ L はわかっているものとする.