お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科

２０２３年度入学試験（８月期）問題

一般選抜用

一般・基礎教育科目

理学専攻

数学コース用

試験日　２０２２ 年 8月18日

試験時間　９：３０－１１：３０

注意事項

試験開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません

(1) この冊子は持ち帰ってください. 下書き用紙が不足するときや答案用紙を破損したときは手を挙げてください.
(2) 問題１から問題２まですべての問題に対して, **それぞれ別の答案用紙に解答してください**. 答案用紙は裏面を使ってもかまいませんが, そのむねを表面に明記してください.
(3) 印刷の不明瞭な部分, ページの脱落などがあった場合は申し出てください.

$\boxed{\text{問題 1}}$

(1) 以下の重積分について、積分の順序を適切に入れ替えることにより積分値を求めよ。

$$\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$$

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ において、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束しない例を挙げ、その例が条件に合うことを示せ。

(3) 実数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ において、無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つことを示せ。

(4) $x \geq 0$ で定義された連続な実数値関数 $f(x)$ に対して、広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ が収束するならば $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成り立つか。成り立つならばそのことを示し、成り立たないならばそのような $f(x)$ の例を挙げよ。

問題2

a と b は実定数とする。4次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ に対し、次の問いに答えよ。

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 行列 P が直交行列であることの定義を述べよ。

(3) A を直交行列 P を用いて対角化せよ。P も求めること。

(4) A の階数（ランク）を求めよ。

(5) A が定める線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \varphi(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4)$ について、$\mathrm{Im}\,\varphi$ の次元と基底を求めよ。

(6) $a = 2, b = 1$ とする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とし、A が定める二次形式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考える。ただし、${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す。$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ をみたすとき、$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の最大値と最小値を求めよ。ただし、そのときの $\boldsymbol{x}$ を求める必要は無い。

２０２３年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）
理学専攻・物理科学コース
８月入試問題
基礎科目試験

試験日：２０２２年　８月１８日（木）
試験時間：　９：３０　—　１２：３０

注意事項

（１） ５問すべて解答すること。（各問１００点）

（２） 解答は各問あたり１枚の答案用紙に記入すること。
　（裏面使用可）

（３） 答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。

（４） 監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を
　開けないこと。

（５） 試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目 ― 力学

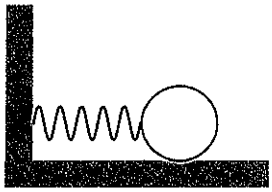


図1

図1のように、なめらかで水平な床に対して垂直な壁にばね定数 k のばね（自然長 l）の一端を固定し、もう一端には質量 m のおもりを取り付ける。おもりの大きさ、およびばねの大きさと質量は無視する。床に水平な方向を x 軸にとり、おもりは x 軸に沿ってのみ、運動するものとする。つりあいの位置からのおもりの変位を x とする。以下の問に答えよ。

1. おもりのラグランジアン $L = T - V$ を求めよ。ここで T と V はそれぞれ運動エネルギーと位置エネルギーを表す。

2. おもりの運動方程式を求めよ。運動方程式の一般解を求めておもりの運動について説明せよ。

図2

次に、図2のように質量 M のおもりの左右に質量 m のおもり1つずつをそれぞればね定数 k のばね（自然長 l）でつないだ振動子を考える。おもりの並んだ方向を x 軸にとり、おもりは x 軸に沿ってのみ、運動するものとする。おもりの運動に対する摩擦は考えない。つりあいの位置からのおもりの変位を、左のおもりから順に x_1, x_2, x_3 とする。以下の問に答えよ。

3. この連成振動子のラグランジアン L を求めよ。

4. 3つのおもりの運動方程式を求めよ。

5. 基準振動の角振動数を求めよ。

2　基礎科目 ー 電磁気学

図 1 のような同軸ケーブル中での電磁波を考える。以下の設問に答えよ。

(1) 絶縁体中を z 方向に進む角振動数 ω の横モード電磁波を考え、

$$\boldsymbol{E} = \Big(E_x(x,y), E_y(x,y), 0\Big)e^{i\omega t-\gamma z}$$
$$\boldsymbol{H} = \Big(H_x(x,y), H_y(x,y), 0\Big)e^{i\omega t-\gamma z}$$

とおく。γ は複素数である。関係式 $\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu=0$ を導け。

※電磁場の方程式として、下記を参考にしてもよい。

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{j}$、ε、μ は、電場、磁場、電流密度、誘電率、透磁率である。

(2) 同軸ケーブルの単位長さあたりの静電容量 C を a、b、ε で表せ。

※各導体に、正負が逆で一定の電荷を与え、導体間の電位差に注目するとよい。

(3) 電流は導体の表面（絶縁体と接する面）のみを z 方向に流れると仮定して、同軸ケーブルの単位長さあたりのインダクタンス L を a、b、μ で表せ。

※各導体に、向きが逆で一定の電流を与え、面 S を貫く磁束に注目するとよい。

(4) 同軸ケーブルを用いて、問 (1) の横モード電磁波を伝送する。これに伴う導体中の $\boldsymbol{j}$ は、z 方向成分 $j_z e^{i\omega t-\gamma z}$ のみもつとする。交流電圧 V と交流電流 I の比 $Z(=V/I)$ を C、ε、μ で表せ。

※ V を導体間に印加すると、C に応じた電荷が誘起され、問 (1) の $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{j}$ の関係を満たすように、信号線に I が発生することに注目するとよい。

(5) 関係式 $LC=\varepsilon\mu$ を導け。

※必要なら、電場のエネルギーと磁場のエネルギーの関係に注目するとよい。

(6) 信号線の単位長さ当たりの抵抗 R が無視できない場合を考える。この同軸ケーブルの単位長さあたりの回路モデルを描くとき、図 2 の点線で囲われた部分はどうなるか、L、C、R を用いて図示せよ。

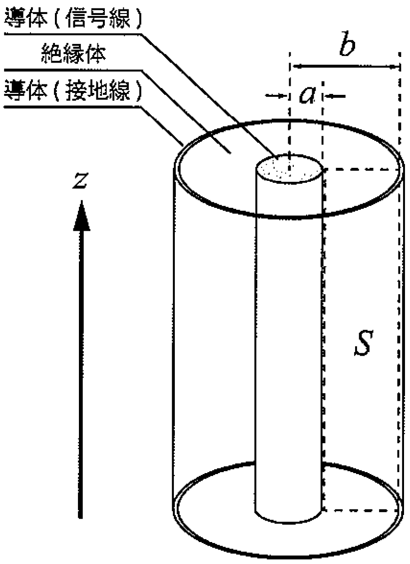


図１　同軸ケーブル (単位長さ). 半径 a の円筒型の導体 (信号線)、半径 b の中空円筒型の導体 (接地線)、その間に挟まれた絶縁体で構成される. 全長は十分長い.

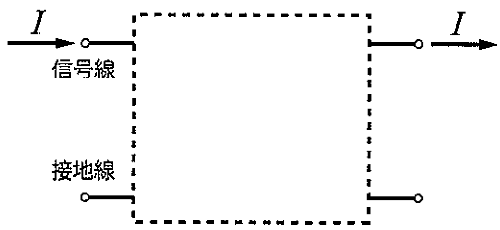


図２　未完成の回路モデル (単位長さ).

3. 基礎科目 一物理数学

(1) 線形代数は物理にどのように役に立っていますか：特に固有値・固有関数・線形変換・行列の指数関数など．具体的な例を挙げて数式を用いて説明してください．

(2) 図 1 のように関数の一部分が，$\begin{cases} -1, (x < -1) \\ 1, (x > 1) \end{cases}$ で与えられているとき，残りの領域 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ を補完する適当な関数を作り，数式で表してください．ただしそれは，実数全体で無限回微分可能な連続関数としましょう．

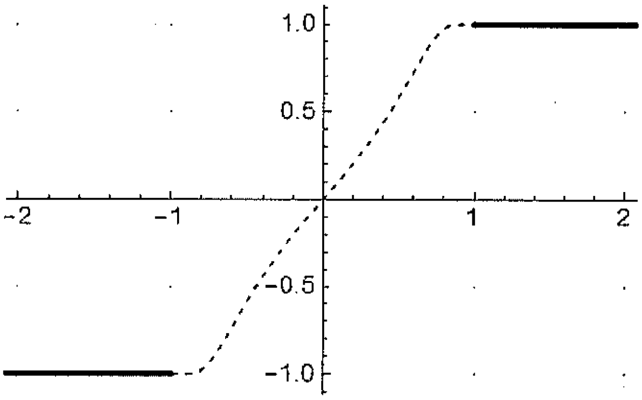


図 1　破線は $[-1,1]$ を補完する関数のイメージです．

(3) 関数 $\sin(x)$ の原点周りの Taylor 展開は，次数を上げる程いくらでも大きな領域まで良く近似できます（図 2 左）．一方，関数 $\log(1+x)$ の展開は，そうではない（図 2 右）のはなぜですか．大きな x で展開したい時はどうすればいいですか．

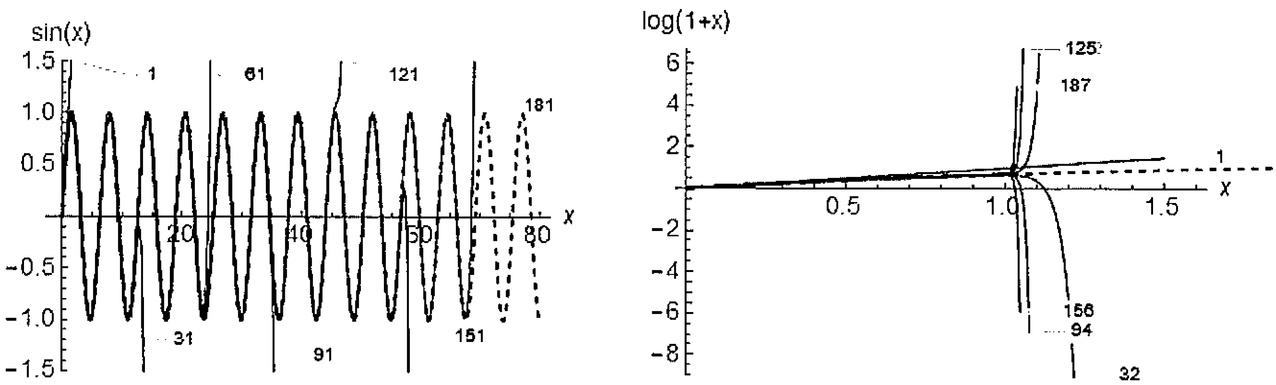


図 2　左右のグラフそれぞれの破線は $\sin(x)$，$\log(1+x)$．実線と数字は，その次数までの Taylor 展開を描いたもの．

4　基礎科目 ― 量子力学

1 次元シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x)$$

を考える。ここで、ポテンシャル $V(x)$ は

$$V(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ V_0 & (x>0) \end{cases}$$

で与えられるとする。また、$V_0>0$ とする。

まず、$E<V_0$ の場合を考える。

(1) $x<0$ での波動関数 $\psi(x)$ の一般解を求めよ。
(2) $x>0$ での波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。
(3) (1) と (2) で得られた波動関数およびその微分を $x=0$ で接続することにより、全系の波動関数を求めよ。古典力学から期待されることとは異なる波動関数の特徴を述べよ。

次に、$E>V_0$ の場合を考える。

確率の流れの密度 j は

$$j=\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx}-\psi\frac{d\psi^*}{dx}\right)$$

で与えられる。

(4) $x<0$ でシュレディンガー方程式を満たす波動関数のうち、運動量演算子の固有状態で $j>0$ となるものを求めよ。この波動関数を ψ_{in} とし、その j の値を j_{in} とする。
(5) $x<0$ で同様に、運動量演算子の固有状態で $j<0$ となる波動関数を求めよ。その波動関数および j を ψ_{re}、j_{re} とする。
(6) $x>0$ で同様に、運動量演算子の固有状態で $j>0$ となる波動関数を求めよ。その波動関数および j を ψ_{tr}、j_{tr} とする。
(7) ψ_{in} を入射波、ψ_{re} を反射波、ψ_{tr} を透過波とする。(4), (5), (6) の結果を用いて、$x=0$ で波動関数およびその微分を接続することにより、透過率 $j_{\mathrm{tr}}/j_{\mathrm{in}}$ および反射率 $|j_{\mathrm{re}}|/j_{\mathrm{in}}$

を求めよ。エネルギー E を変化させたとき、透過率はどのようなふるまいをするか答えよ。古典力学から期待される結果と比較して相違点を述べよ。

5　基礎科目 ー 熱・統計力学

3 次元理想フェルミ粒子系の基底状態を考える。一辺の長さ L の立方体 (体積 $V{=}L^3$) 内に質量 m、スピン $S{=}1/2$ のフェルミ粒子が N 個あるとし、以下の問いに答えよ。なお、ディラック定数 (換算プランク定数) を $\hbar$ とする。

(1) フェルミ波数 k_F を求めよ。

(2) フェルミエネルギー ε_F を求めよ。

(3) 状態密度 $D(\varepsilon)$ を求めよ。なお、エネルギーが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間の値をもつ状態数が $D(\varepsilon)d\varepsilon$ である。

(4) 絶対温度 $T{=}0$ における系のエネルギー E_0 を求めよ。

(5) 上記で求めた E_0 が V に依存することから、この粒子系は $T{=}0$ においても圧力 p_0 をもつことがわかる。問 (4) の結果より p_0 を求めよ。

2023年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学　専攻・化学・生物化学　コース

（　８　月　入　試　）
（　専　門　科　目　）

試　験　日　：　2022 年 8月 18日 (木)
試 験 時 間　：　9 時 30 分 ～ 12 時 00 分

【注意事項】

1. 監督者の「始め」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 5問中3問選択すること。(各問100点)
3. 解答は各問題分野あたり1枚の答案用紙に記入すること。(裏面使用可)
4. 答案用紙の裏面を使用する場合は、太線より下に記入すること。
5. 解答番号欄に、選択した問題分野の番号を記入すること。
6. 試験中、用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。

1　物理化学

（1）分子軌道に関する問 1－6 に答えよ。

問 1　O_2 分子、F_2 分子のエネルギー準位関係は図 1(a)のように描ける。この図を用いて、電子のスピン磁気量子数 $m_s = 1/2$ を上向き矢印、$m_s = -1/2$ を下向き矢印として、O_2 分子、F_2 分子の電子配置を図示せよ。

問 2　Li_2～N_2 分子のエネルギー準位関係は図 1(b)のように描ける。(i)と同様に N_2 分子の電子配置を図示せよ。

問 3　N_2 分子、O_2 分子、F_2 分子の結合次数を求めよ。なお、解答に至る過程も示すこと。

問 4　N_2 分子、F_2 分子は反磁性である一方、O_2 分子は常磁性である。この理由を(i), (ii)で示した電子配置の違いから述べよ。

問 5　Ne_2 分子は安定にはほぼ存在しない。この理由を述べよ。

問 6　ヒュッケル近似でエチレンの永年行列式は

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} = 0$$

と書ける。クーロン積分 α が−8.1 eV、共鳴積分 β が−2.4 eV のとき、エチレンのイオン化エネルギーと $\pi^* \leftarrow \pi$ の励起エネルギーをそれぞれ求めよ。なお、解答に至る過程も示すこと。

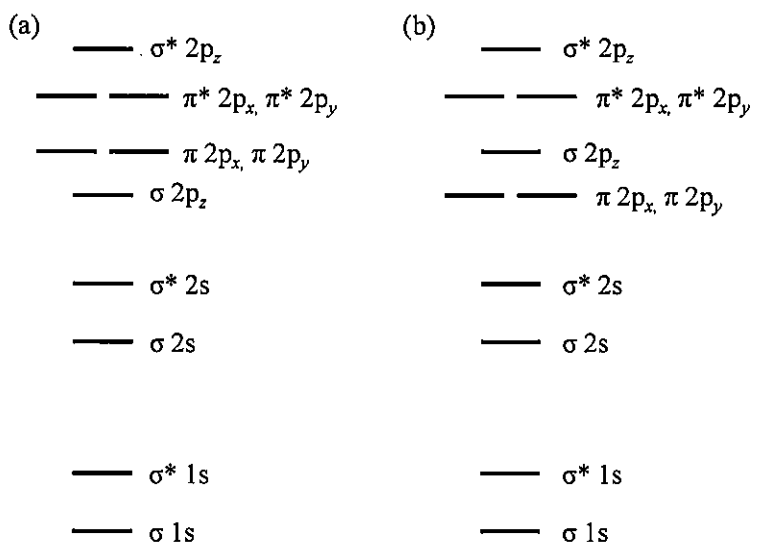


図 1.　(a) O_2 分子、F_2 分子、(b) Li_2～N_2 分子に対する分子軌道のエネルギー準位関係。エネルギー準位の間隔は正確ではない。

（2）閉鎖系におけるギブスエネルギーGの微小変化は、マックスウェルの関係式から圧力と温度の関数として式(1)で表される。

$$\mathrm{d}G(p,T) = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T \qquad (1)$$

これより、温度一定のとき、ギブスエネルギーの圧力依存性は式(2)で表される。

$$\mathrm{d}G(p)_T = \boxed{（ア）} \qquad (2)$$

問1 $\boxed{（ア）}$に当てはまる式を記せ。

問2 系の構成物質が気体であり完全気体とみなせるとき、温度一定における系のギブスエネルギーの圧力依存性$G(p)_T$を求めよ。ただし、温度Tの標準状態におけるギブスエネルギーを$G^{\ominus}(T)$とする。

問3 気体が完全気体とみなせないときのギブスエネルギーと完全気体におけるギブスエネルギーの差ΔGは、フガシティー係数ϕを用いて式(3)で表される。気体が完全気体とみなせないときの系のギブスエネルギーを表す式を記せ。

$$\Delta G = nRT\,\ln\phi \qquad (3)$$

問4 気体GがG_i ($i = 1, 2$)の二つの異性体を持つとする。温度Tにおける平衡異性体モル比n_2 / n_1を、それぞれの異性体のフガシティー係数ϕ_i、標準化学ポテンシャル$\mu_i^{\ominus}(T)$、および気体定数Rを用いて記せ。

問5 ϕ_iが図2に示した圧力依存性を示し、異性化反応$G_1 \rightarrow G_2$に対する標準ギブスエネルギー変化が$\Delta G_i^{\ominus}(T) = -2.5\ \mathrm{kJ\ mol^{-1}}$であったとする。$T = 300\ \mathrm{K}$において異性体$G_2$の物質量を$G_1$よりも多くするためには、系の圧力をどのようにすればよいか。ただし、$R \equiv 8.31446261815324\ \mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}}$、$\mathrm{e} = 2.718281828459045\ldots$である。

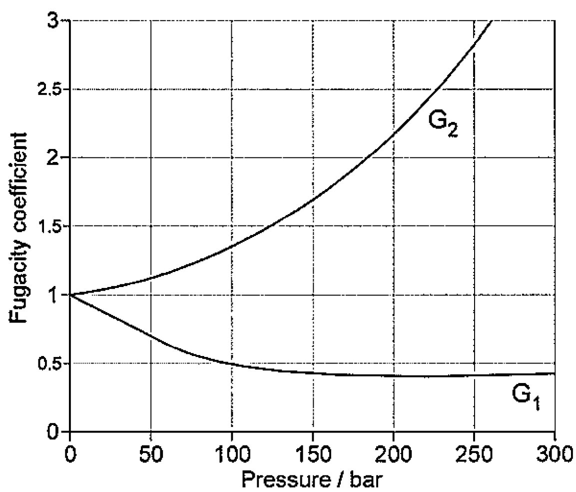


図2. $T = 300\ \mathrm{K}$におけるG_iのフガシティー係数の圧力依存性。

2　無機化学

(1)　つぎの分子およびイオンの形を予想し、立体構造がわかるように図示せよ。また、太字の元素の酸化数を示せ。

(i)　**P**Cl_5　　(ii)　**S**O_3^{2-}　　(iii)　**N**O_3^-

(2)　つぎの元素の第二イオン化エネルギーを比較し、どちらの方がより大きいか理由とともに述べよ。

(i)　${}_{18}Ar$ と ${}_{19}K$　　　　(ii)　${}_{24}Cr$ と ${}_{25}Mn$

(3)　イオン結晶の格子エンタルピーについて、次の問に答えよ。

(i)　つぎに示す値を用い、塩化カリウムの格子エンタルピーを求めよ。計算過程も示すこと。

K(s)の昇華熱	+89 kJ/mol
K(g)の第一イオン化エネルギー	+425 kJ/mol
Cl_2(g)の解離エネルギー	+244 kJ/mol
Cl(g)への電子親和力	−355 kJ/mol
KCl(s)の生成エンタルピー	−438 kJ/mol

(ii)　塩化ナトリウム結晶の格子エンタルピーは、−786 kJ/mol である。(i)で求めた塩化カリウムの格子エンタルピーの値と比較し、両者の格子エンタルピーの差の要因は何であるか述べよ。

(4)　分子における結合距離は一般に、結合エネルギーとの相関がある。ハロゲン単体の二原子分子について、つぎの問に答えよ。

(i)　Cl_2、Br_2、I_2 の結合エネルギーを結合距離の逆数に対してプロットしたときのグラフの概略を図示せよ。

(ii)　(i)で示したグラフをもとに、結合距離と結合エネルギーの関係について理由とともに説明せよ。

(iii)　F_2 の結合エネルギーは、Cl_2、Br_2、I_2 とは異なる挙動を示す。どのように異なるか、理由とともに答えよ。

(iv)　ハロゲン蒸気の色は Cl_2 で黄緑だが、Br_2 では赤茶、I_2 では紫に変化する。このような色の変化を示す理由を定性的に説明せよ。

(5)　d^9 の金属イオンが八面体６配位構造をとるとき、ヤーン・テラーひずみがある場合とない場合で、どちらが安定であると考えられるか答えよ。根拠も合わせて示すこと。

(6)　エチレンジアミン（$NH_2CH_2CH_2NH_2$）のように複数の部位で金属イオンと配位結合する多座配位子は、その配位部位（この場合は、アンミン配位子）が単独で２つ結合するよりも金属錯体を安定化する。これをキレート効果というが、この安定化の要因について熱力学に基づき説明せよ。

3　有機化学

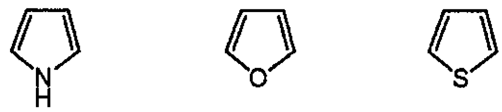
（1）次の(a)～(c)の各化合物群について酸性度の高い順に並べ、そのような序列になる理由を述べよ。

(a) HF, HI, HBr, HCl

(b) エチン、エタン、エテン

(c) エタノール、*p*-ニトロフェノール、安息香酸、フェノール

（2）化合物 **1**～**3** について以下の問いに答えよ。



1　　**2**　　**3**

(a) それぞれの化合物名を日本語で記せ。

(b) 化合物 **1** の共鳴寄与体をすべて示せ。

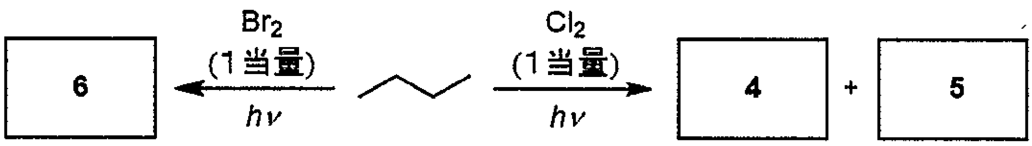
(c) 化合物 **1**～**3** の相対的非局在化エネルギーの大きい順に並べよ。またその理由も述べよ。

(d) 化合物 **1**～**3** の求電子置換反応に対する反応性の高い順に並べよ。またその理由も述べよ。

(e) 化合物 **1** と臭素との反応では、2 種類の位置異性体が生成しうるが、どちらの異性体が主生成物になるか、理由とともに示せ。

(f) 化合物 **1** およびアニリン、ピリジン、ピペリジンの塩基性の高い順に並べよ。またその理由も述べよ。

（3）光照射下におけるブタンの塩素化・臭素化について以下の問いに答えよ。

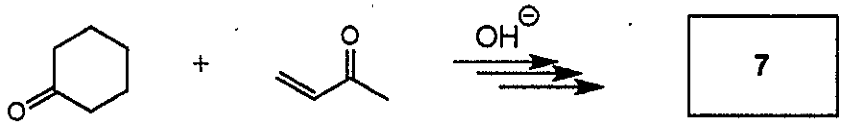


(a) 塩素化では化合物 **4** と **5** が約 7:3 の比率で生じた。**4** と **5** の構造式と英語名を示し、生成比の偏りが生じた理由を述べよ。なお、光学異性体は無視してよい。

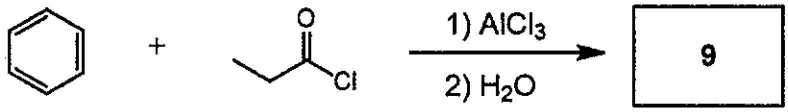
(b) 臭素化では単一の化合物 **6** が得られた。**6** の構造式と英語名を示せ。

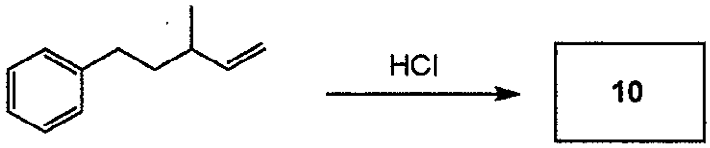
(c) 塩素化と臭素化では、臭素化の方が高い選択性であった。この現象を「ブタンと塩素ラジカルからブチルラジカルと塩化水素」および「ブタンと臭素ラジカルからブチルラジカルと臭化水素」が生じる反応座標図を用いて説明せよ。なお、前者は発熱反応、後者は吸熱反応であることに留意せよ。

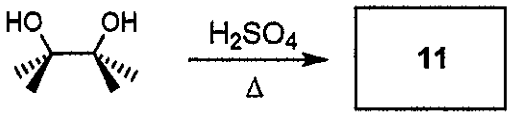
（4）以下の反応の主生成物 **7～15** を答え、(a)～(d)については反応機構も示せ。なお、光学異性体が生じるものについては、立体化学がわかるようにすべての異性体を示せ。

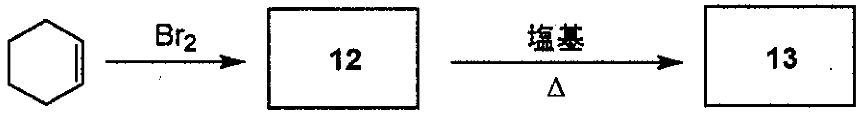
(a) 

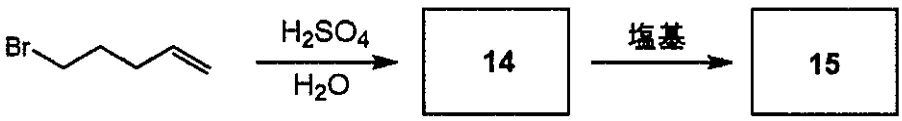
(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

(g) 

4 生物化学

（1） タンパク質に関する以下の設問に答えよ。

問1. タンパク質の物性や分析方法に関する文章 a〜c のうち、正しいものには○を、間違いがある場合は×を書き、どちらの場合でもその理由を論理的に記述せよ。

a. タンパク質のアミノ酸配列をエドマン分解や質量分析で調べた場合と、cDNA 配列から調べた場合では、得られるアミノ酸配列は同じである。

b. タンパク質水溶液を加熱していくと、ある温度で 280 nm の吸光度が大きく変化する。

c. タンパク質を SDS-ポリアクリルアミドゲル電気泳動で分離する場合、タンパク質は正極側から負極側に移動する。

問 2. 以下にあげた a〜f のタンパク質と最も関連があると考えられる化合物やイオンを［　　］から１つずつ選び、その理由を論理的に記述せよ。

a. カルモジュリン

b. ヘモグロビン

c. コラーゲン

d. 炭酸デヒドラターゼ

e. ロドプシン

f. ユビキチン

［　レチナール、アスコルビン酸、Zn^{2+}、Ca^{2+}、Fe^{2+}、リジン　］

問 3. 以下の文章の①〜④、⑥〜⑩に適切と考えられる用語を答えよ。⑤はハース投影式で構造を書け。

タンパク質のアスパラギン残基には *N*-（①）結合でオリゴ糖鎖が付加する場合がある。このオリゴ糖鎖は、中性糖として *N*-アセチル-D-グルコサミン、D-（②）、D-（③）を含み、そして酸性糖として（④）基を含むシアル酸が付加する場合がある。*N*-アセチル-D-グルコサミンの構造は（⑤）である。この他、*O*-（①）結合で付加するムチン型糖鎖や、（④）基や（⑥）基を含む二糖繰り返し構造の（⑦）鎖がある。タンパク質への糖鎖付加は小胞体や（⑧）でおこり、（⑨）酵素が（⑩）を基質として前駆体糖鎖に糖を１つずつ付加する。

（2）プラスミドの精製方法に関する以下の文章を読み、設問に答えよ。

アンピシリン耐性遺伝子を含むプラスミドで(a)コンピテントセルを形質転換し、アンピシリンを含むLB寒天培地上にコロニーを得た。このコロニーから大腸菌をとり、アンピシリンを含むLB液体培地で終夜培養した。培養液を遠心分離して大腸菌をペレットにし、このペレットを溶液A(Tris-HCl pH8.0、EDTA)で懸濁した。溶液 B (NaOH、SDS)を加えて(b)穏やかに混和し、ただちに溶液 C (CH_3COOK-CH_3COOH pH4.8)を加えた。再び穏やかに混和したところ、(c)沈殿が得られた。遠心分離し、沈殿が混入しないよう注意深く上清を回収した。この(d)上清に対して約2.5 倍量(体積比)のエタノールを加えて遠心分離することで、ペレットを得た。このペレットを 70%エタノールで洗浄し、(e)5 分ほど乾燥させたのち、滅菌水でペレットを溶解した。溶解した試料を(f)アガロースゲル電気泳動により分離し、ゲルを(g)エチジウムブロマイド溶液につけた。染色後のゲルを紫外光照射下で観察したところ、試料には(h)プラスミド由来のバンドが複数見られた。

問1. 下線(a)のコンピテントセルとは何か、作成法を含めて簡潔に説明せよ。

問2. 下線(b)において、激しく混和した場合や、次の手順にただちに進まない場合、どのような問題が起きうるか、説明せよ。

問3. 下線(c)の沈殿にはどのような成分が含まれると考えられるか、説明せよ。

問4. 下線(d)のような操作の名称と原理を説明せよ。

問5. 下線(e)の乾燥が不十分な場合、どのような問題が起きうるか、説明せよ。

問6. 下線(f)は何をどのような原理で分離する方法か、説明せよ。

問7. 下線(g)の操作により、なぜ核酸を可視化できるのか、説明せよ。

問8. 下線(h)において、プラスミド由来の複数のバンドが見られる理由を説明せよ。

（3）細胞内情報伝達に関する以下の設問に答えよ。

問1. タンパク質においてリン酸化を受けるアミノ酸を三つ、名称を答えるとともに構造を書け。ただし立体配置は考えなくて良い。

問2. リン酸化を行う酵素、および脱リン酸化を行う酵素の総称をそれぞれ答えよ。

問3. G タンパク質は GTPase 活性を持つタンパク質の総称である。なぜリン酸化修飾や G タンパク質が、タンパク質の機能制御や相互作用の制御に用いられるのか。リン酸化と G タンパク質の場合の類似点・相違点を含めて説明せよ。

5 分析化学

（1）次の実験を行なった。以下の(a)～(h)に答えよ。

(i) 鉄(III)標準溶液[1)]をそれぞれ、0、1、2、3、4、5 mL ずつ(A)メスピペットを用いて各分液ロートにとり、純水で約 50 mL にした。

(ii) 各分液ロートに(B)pH 5.2 の緩衝溶液 2 mL および(C)8-キノリノール[2)]溶液 2 mL を加えて軽く振り混ぜ、溶液を均一にした。さらにクロロホルム 10 mL を(D)ホールピペットで加えた後、混合物を激しく振り混ぜた。

(iii) 静置して分相し、クロロホルム相のみを試験管にとり、それを光路長 1 cm の分光セルに(E)駒込ピペットで入れた。

(iv) 分光光度計で(F)空試験液（クロロホルムのみ）を対照として、波長 470 nm の吸光度を測定したところ、0.001、0.198、0.403、0.598、0.799、1.002 の結果を得た。

(v) 濃度未知の鉄(III)溶液 X を、5 mL とって上と同様の操作でクロロホルム相の吸光度を測定したところ、0.885 であった。

1) 鉄(III)標準溶液：硫酸鉄(III)（$Fe_2(SO_4)_3 \cdot nH_2O$、FW: 489.87）0.4899 g を 500 mL に純水で定容し、10 倍に希釈したもの。

2) 8-キノリノール：構造式は図 1。

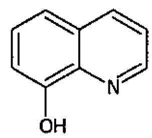


図 1

(a) 下線部(B)で、緩衝溶液を加える理由を記せ。

(b) 下線部(C)の 8-キノリノールと Fe^{3+}の錯体形成比（8-キノリノール：Fe^{3+}）を記せ。

(c) 下線部(C)で、8-キノリノール溶液の濃度は何 mol/L 以上必要か。

(d) 下線部(F)で、空試験液を用いる理由を記せ。

(e) 下線部(A)、(D)、(E)の 3 種のピペットについて、それぞれの形状を描き、その用途を記せ。安全ピペッターを用いるかどうかも記せ。また、3 種で容量の精度の高さも比較せよ。

(f) 実験結果から、鉄錯体の検量線を示すグラフをフリーハンドで描き、鉄錯体のモル吸光係数を計算せよ。計算過程および単位も示すこと。ただし、鉄錯体の水に対するクロロホルムへの分配係数は 10^5 とする。

(g) 鉄溶液 X の Fe^{3+}濃度を計算せよ。計算過程も記すこと。

(h) 吸光度を測定した波長 470 nm の吸収は、鉄錯体のどのような電子遷移であると考えられるか。考え方も記すこと。

（2）体積 $V(\mathrm{w})$の水溶液に質量 M の化合物 X が溶けている。そこから化合物 X を体積 $V(\mathrm{o})$の有機溶媒 A で抽出する。抽出された X の質量は N 、化合物 X に関して有機溶剤 A の水に対する分配係数 $K(\mathrm{d})$は 10 とする。この操作後の化合物 X の水溶液中残存率 $f(\mathrm{w})$を表す式を導出せよ。

（3）以下の(a)～(d)について 100 文字～200 文字程度で答えよ。

(a)　pH 緩衝作用の特徴と最大緩衝能を示す pH 緩衝剤の調製方法の事例を示せ。

(b) 中和滴定の分析値が、14.02 mL、14.01 mL、13.95 mL、14.00 mL で、真の値が 14.05 mL に関して正確さと精密さについて説明せよ。

(c) 指示薬を用いた中和滴定の反応として必要な条件の一つは、“反応は当量点において事実上完結しなければならない”と言われる。その理由を説明せよ。

(d) 共通イオン効果および異種イオン効果について例を示して説明せよ。

2023 年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
一般入試・外国人留学生入試
基礎科目試験
（数学基礎・情報基礎）

試験日：　2022 年 8 月 18 日（木）

試験時間：　9 時 30 分　～　12 時 00 分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4 問すべてに解答し，解答には各問あたり 1 枚の答案用紙を使用すること。（裏面使用可）

数 学 基 礎

【1】

[1] 以下の各問に答えよ.

(1) 関数 $\cos x$ をマクローリン展開し，0でない最初の3項を求めよ.

(2) 3次元空間の曲面 $z(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$ の $(1,\ 1,\ z(1, 1))$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D (x - 2y)dxdy$ の値を求めよ.
ただし $D = \{(x, y)\,|\, x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ とする.

[2] n を自然数とし，不定積分 I_n と J_n を

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$$

$$J_n = \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^n}$$

で定める.

(1) I_1 を求めよ.

(2) $I_n + J_n$ を I_{n-1} を用いて表せ.

(3) J_n を I_{n-1} を用いて表せ.

(4) I_n を I_{n-1} を用いて表せ．また，I_3 を求めよ.

【2】

[1] 実数を係数とする高々 3 次の多項式全体を $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ と書く。 $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ は普通の多項式の和と定数倍によって $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる。

$\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ の部分集合 $V = \{f \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} | f(1) = 0\}$ と $W = \{f \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} | f(1) = f(2)\}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) V と W は $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ の部分空間であることを示せ。

(2) V の次元を求めよ。

(3) W の次元を求めよ。

[2] 次の行列 M に対し，以下の問いに答えよ。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) M の行列式を求めよ。

(2) M が正則行列か否かを判断し、正則ならば M の逆行列を求めよ。

(3) M の核 $\mathrm{Ker}(M) := \{\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\ M\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ を求めよ。

情　報　基　礎

【3】 以下の各問に答えよ．

(1) 命題論理の論理式 $\neg P \wedge R \leftrightarrow Q \vee P \rightarrow R$ の真偽値表について，以下の空欄 A〜E を埋めよ．

P	Q	R	$\neg$	P	$\wedge$	R	$\leftrightarrow$	Q	$\vee$	P	$\rightarrow$	R
1	1	1		1		1		1		1		1
1	1	0		1		0		1		1		0
1	0	1		1		1		0		1		1
1	0	0	A	1	B	0	C	0	D	1	E	0
0	1	1		0		1		1		0		1
0	1	0		0		0		1		0		0
0	0	1		0		1		0		0		1
0	0	0		0		0		0		0		0

(2) 以下は一階述語論理の意味論について述べたものである．以下の空欄 F〜J を埋めよ．ただし P は二項述語，x, y は変項とし，解釈 $\langle M, g\rangle$ は以下を満たすとする．

$$D_M \stackrel{def}{\equiv} \{s,t\},\quad F_M(P) \stackrel{def}{\equiv} \begin{bmatrix} (s,s) & \mapsto & 0 \\ (s,t) & \mapsto & 1 \\ (t,s) & \mapsto & 0 \\ (t,t) & \mapsto & 0 \end{bmatrix},\quad g \stackrel{def}{\equiv} \begin{bmatrix} x & \mapsto & s \\ y & \mapsto & s \end{bmatrix}$$

このとき，解釈 $\langle M, g\rangle$ のもとでの論理式 $\forall x \exists y P(x,y)$ の意味論的値は，以下のように計算される．

$$\begin{aligned} & [\![\forall x \exists y P(x,y)]\!]_{M,g} = 1 \\ \iff & \text{すべての } a \in D_M \text{ について } [\![\exists y P(x,y)]\!]_{M,\boxed{F}} = 1 \\ \iff & \text{すべての } a \in D_M \text{ について，} \\ & \quad [\![P(x,y)]\!]_{M,\boxed{G}} = 1 \text{ を満たす } b \in D_M \text{ が存在する．} \end{aligned}$$

一方，$[\![P(x,y)]\!]_{M,\boxed{G}} \stackrel{def}{\equiv} F_M(P)\left([\![x]\!]_{M,\boxed{G}}, [\![y]\!]_{M,\boxed{G}}\right) \stackrel{def}{\equiv} F_M(P)\left(\boxed{H}, \boxed{I}\right)$

である．したがって，$[\![\forall x \exists y (P(x,y))]\!]_{M,g} = \boxed{J}$ である．

(3) 空集合から空集合への写像は存在するか．存在する場合は例を示せ．存在しない場合は理由を述べよ．

(4) 一般に，一階述語論理の意味論では解釈の領域 D_M が空ではないという仮定をおくが，この仮定と $\forall x \phi \vDash \exists x \phi$ という推論の妥当性の関係について説明せよ．

【4】あるグループの全体の意思決定としてA案とB案の二つのどちらかを選ぶものとする。

個人の意見としてA案、B案そしてそれ以外(C)の三つがあり、説明を受けるごとに現在持っている意見に応じてそれぞれの意見がA,B,それ以外(C)の三つの間を動くものとする。

グループの意思決定は、

(i) A案もしくはB案が過半数であり、かつ

(ii) その案がそれ以外(C)の数を上回るとき

その案に決定するものとする。初期状態では全員それ以外(C)の意見とする。このとき、以下の各問に答えよ。

(1) A,B,Cそれぞれの案をノードとし、各案からそれぞれの案に移り変わる際の向きをもった枝をアークとしたグラフを描け。
aからcへ向かうアークにはacのようにアークはすべてラベル付けせよ。

(2) (1)で描いたグラフを3×3の行列形式で表せ。
このときA,B,Cをベクトルとして行列を計算したとき、新しく求めたベクトル値が次の世代のA,B,Cの値となっているようにせよ。

(3) グループとしての意思決定が何回の説明を受けたときに起こるか定めるためのプログラムを書け。
言語はなにを用いてもよい。

(4) このプログラムは停止しないことがある。停止しない例を1つ挙げよ。

(5) このプログラムが停止するための条件を挙げよ。

2023 年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
社会人特別入試
基礎科目試験
（数学基礎・情報基礎）

試験日：　2022 年 8 月 18 日（木）

試験時間：　10 時 30 分　～　12 時 00 分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 数学基礎・情報基礎２科目のうち１科目に解答し，解答には各問あたり１枚の答案用紙を使用すること。（裏面使用可）

数　学　基　礎

【1】

[1] 以下の各問に答えよ.

(1)　関数 $\cos x$ をマクローリン展開し，0でない最初の3項を求めよ.

(2)　3次元空間の曲面 $z(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy$ の $(1,\ 1,\ z(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ.

(3)　積分 $\iint_D (x-2y)dxdy$ の値を求めよ.
ただし $D = \{(x,y)\,|\,x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ とする.

[2] n を自然数とし，不定積分 I_n と J_n を

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

$$J_n = \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}$$

で定める.

(1)　I_1 を求めよ.

(2)　$I_n + J_n$ を I_{n-1} を用いて表せ.

(3)　J_n を I_{n-1} を用いて表せ.

(4)　I_n を I_{n-1} を用いて表せ．また，I_3 を求めよ.

【2】

[1] 実数を係数とする高々 3 次の多項式全体を $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ と書く。 $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ は普通の多項式の和と定数倍によって $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる。

$\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ の部分集合 $V = \{f \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} | f(1) = 0\}$ と $W = \{f \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} | f(1) = f(2)\}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) V と W は $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ の部分空間であることを示せ。

(2) V の次元を求めよ。

(3) W の次元を求めよ。

[2] 次の行列 M に対し，以下の問いに答えよ。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) M の行列式を求めよ。

(2) M が正則行列か否かを判断し、正則ならば M の逆行列を求めよ。

(3) M の核 $\mathrm{Ker}(M) := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\ M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を求めよ。

情 報 基 礎

【3】 以下の各問に答えよ.

(1) 命題論理の論理式 $\neg P \wedge R \leftrightarrow Q \vee P \to R$ の真偽値表について，以下の空欄 A〜E を埋めよ.

P	Q	R	$\neg$	P	$\wedge$	R	$\leftrightarrow$	Q	$\vee$	P	$\to$	R
1	1	1		1		1		1		1		1
1	1	0		1		0		1		1		0
1	0	1		1		1		0		1		1
1	0	0	A	1	B	0	C	0	D	1	E	0
0	1	1		0		1		1		0		1
0	1	0		0		0		1		0		0
0	0	1		0		1		0		0		1
0	0	0		0		0		0		0		0

(2) 以下は一階述語論理の意味論について述べたものである．以下の空欄 F〜J を埋めよ．ただし P は二項述語，x, y は変項とし，解釈 $\langle M, g\rangle$ は以下を満たすとする.

$$D_M \overset{def}{\equiv} \{s, t\},\quad F_M(P) \overset{def}{\equiv} \begin{bmatrix} (s,s) & \mapsto & 0 \\ (s,t) & \mapsto & 1 \\ (t,s) & \mapsto & 0 \\ (t,t) & \mapsto & 0 \end{bmatrix},\quad g \overset{def}{\equiv} \begin{bmatrix} x & \mapsto & s \\ y & \mapsto & s \end{bmatrix}$$

このとき，解釈 $\langle M, g\rangle$ のもとでの論理式 $\forall x \exists y P(x,y)$ の意味論的値は，以下のように計算される.

$$\begin{aligned} & [\![\forall x \exists y P(x,y)]\!]_{M,g} = 1 \\ \iff & \text{すべての } a \in D_M \text{ について } [\![\exists y P(x,y)]\!]_{M,\boxed{F}} = 1 \\ \iff & \text{すべての } a \in D_M \text{ について，} \\ & \quad [\![P(x,y)]\!]_{M,\boxed{G}} = 1 \text{ を満たす } b \in D_M \text{ が存在する.} \end{aligned}$$

一方，$[\![P(x,y)]\!]_{M,\boxed{G}} \overset{def}{\equiv} F_M(P)\left([\![x]\!]_{M,\boxed{G}}, [\![y]\!]_{M,\boxed{G}}\right) \overset{def}{\equiv} F_M(P)\left(\boxed{H}, \boxed{I}\right)$

である．したがって，$[\![\forall x \exists y (P(x,y))]\!]_{M,g} = \boxed{J}$ である.

(3) 空集合から空集合への写像は存在するか．存在する場合は例を示せ．存在しない場合は理由を述べよ.

(4) 一般に，一階述語論理の意味論では解釈の領域 D_M が空ではないという仮定をおくが，この仮定と $\forall x \phi \vDash \exists x \phi$ という推論の妥当性の関係について説明せよ.

【4】あるグループの全体の意思決定としてA案とB案の二つのどちらかを選ぶものとする。

個人の意見としてA案、B案そしてそれ以外(C)の三つがあり、説明を受けるごとに現在持っている意見に応じてそれぞれの意見がA,B,それ以外(C)の三つの間を動くものとする。

グループの意思決定は、

(i) A案もしくはB案が過半数であり、かつ

(ii) その案がそれ以外(C)の数を上回るとき

その案に決定するものとする。初期状態では全員それ以外(C)の意見とする。このとき、以下の各問に答えよ。

(1) A,B,Cそれぞれの案をノードとし、各案からそれぞれの案に移り変わる際の向きをもった枝をアークとしたグラフを描け。
aからcへ向かうアークには**ac**のようにアークはすべてラベル付けせよ。

(2) (1)で描いたグラフを3×3の行列形式で表せ。
このときA,B,Cをベクトルとして行列を計算したとき、新しく求めたベクトル値が次の世代のA,B,Cの値となっているようにせよ。

(3) グループとしての意思決定が何回の説明を受けたときに起こるか定めるためのプログラムを書け。
言語はなにを用いてもよい。

(4) このプログラムは停止しないことがある。停止しない例を1つ挙げよ。

(5) このプログラムが停止するための条件を挙げよ。