２０２３年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）
理学専攻・物理科学コース
２月入試問題
基礎科目試験
（物理科学に関する基礎科目）

試験日：２０２３年２月２日（木）
試験時間：　９：３０　—　１２：３０

注意事項

（１）５問すべて解答すること。（各問１００点）

（２）解答は各問あたり１枚の答案用紙に記入すること。（裏面使用可）

（３）答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。

（４）監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を開けないこと。

（５）完全な解答ができない場合でも途中までの考え方を記述すること。

（６）試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目 ー 力学

質量 m の質点が 2 次元平面内で行う運動について以下の問いに答えよ。質点の位置を示す直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係は

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

で与えられる。ここで $r = r(t)$ は質点の位置ベクトルの大きさであり、$\theta = \theta(t)$ は x 軸からの角度（方向：反時計回り）である。

（参考）ある質点の 2 次元平面での一般化座標と一般化速度をそれぞれ q_i, $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ $(i = 1, 2)$ と表したとき、オイラー・ラグランジュ方程式はラグランジアンを L として

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

で与えられる。

(1) 質点の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の内積 $\boldsymbol{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ を r と θ で表わせ。ここで記号 $\cdot$ は時間微分を表す（つまり $\dot{x} = dx/dt$ など）。

(2) 系のポテンシャル・エネルギー V が位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさにのみ依存するとき（つまり $V = V(r)$）、極座標でのラグランジアン L を求めよ。

(3) 問 2 の L より r に関するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。

(4) 問 2 の L より θ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を求め、角運動量 ℓ が保存することを示せ。

(5) 問 3 と問 4 の結果を用いて質点の運動方程式を角運動量 ℓ を使って

$$m\ddot{r} = F(r, \ell) = -\frac{\partial V_*(r, \ell)}{\partial r}$$

と表すとき、$F(r, \ell)$ と $V_*(r, \ell)$ を V と ℓ を使って表わせ。ただし $\ddot{r} \equiv d^2r/dt^2$ である。

(6) この系の力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_*$$

で与えられる。いま、外力 $f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$ がフックの法則で与えられるとする（つまり $f(r) = -kr$, k は正の定数)。このとき、質点の行う運動の、角運動量が $\ell = 0$ の場合と $\ell \neq 0$ の場合の違いについて説明せよ。

2　基礎科目 ー 電磁気学

十分長く、高い伝導率を有した並行する二つの導体において、図 (a) のように、一方を信号線、他方を接地線とする。導体間に、始端で高周波の交流電圧を印加することで、終端に向かって電磁波を伝送する。

この伝送路をモデル化し、その特性を考えよう。図 (b) のように、微小区間 $[z, z+\Delta z]$ において、抵抗 R、インダクタンス L、キャパシタンス C からなる近似回路が成立している。R、L、C は全て定数で、単位長さ当たりの値である。時刻 t、位置 z における導体間の電圧 $V(z,t)$、信号線に流れる電流 $I(z,t)$ とすると、次の連立微分方程式が成り立つ。

$$-\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R + L\frac{\partial}{\partial t} \\ C\frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix}$$

(1) 図 (b) の点 AB 間でキルヒホッフの電圧則を考え、$\Delta z \to 0$ とすることで、上式の一行目（$\partial V/\partial z$ に関する式）を導け。

(2) 図 (b) の点 A でキルヒホッフの電流則を考え、$\Delta z \to 0$ とすることで、上式の二行目（$\partial I/\partial z$ に関する式）を導け。

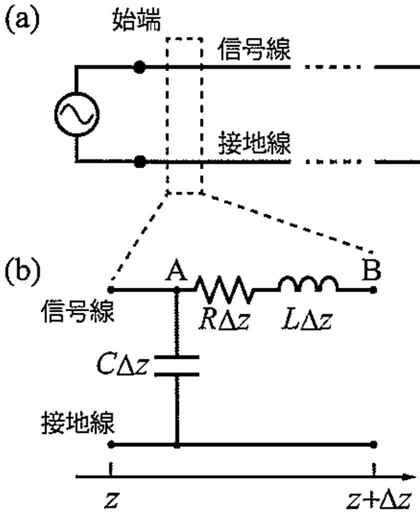
(3) V、I がともに (定数)$\times \exp(i\omega t - \gamma z)$ と書けるとして、γ を求めよ。

以下では $R = 0$ を考える。

(4) V、I の解は進行波と後退波の重ね合わせで書けることを示せ。進行波（後退波）とは、z の正（負）方向に進む波である。

(5) 進行波の V、I を考えることで、特性インピーダンス $Z_0 \equiv V/I$ を求めよ。

(6) 図 (c) のように、終端で導体間をインピーダンス Z_1 でつなげた。終端で反射波が生じないための Z_1 の条件を導け。例えば、点 E での電圧振幅を、入射波、反射波、透過波の成分に分けると良い。それぞれ信号線において、始端側から点 E に向かう進行波、点 E から始端側に向かう後退波、点 E から Z_1 に向かう進行波である。



3. 基礎科目 一物理数学

(1) 次の計算はどこか間違ってますか？詳しく解説してください．

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} \tag{1}$$

従って $i^2 = 1$, つまり $i = \pm 1$ となる．

(2) ガンマ関数 $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$（$z$ は複素数）は自然数に対する階乗の定義域を拡大したものであることを示してください．

(3) ある地域で，ウサギとそれを捕食するヤマネコの個体数（それぞれ $x(t), y(t)$）の時間発展は，素朴に考えると以下のように書けるでしょう．

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= cx(t)y(t) - dy(t) \end{aligned} . \tag{2}$$

ここで，ウサギは増加率 a で繁殖し，速度 b でヤマネコに捕食されます．ヤマネコは速度 c で捕食増殖し，減衰率 d で減少します $(a, b, c, d > 0)$．　このウサギ・ヤマネコ系の平衡点とその安定性を調べてください．その他何でも自由に議論してください．

参考までに図 1 を付けます：これはこの系の典型的な解であり，位相がずれて周期的なふるまいを繰り返します．

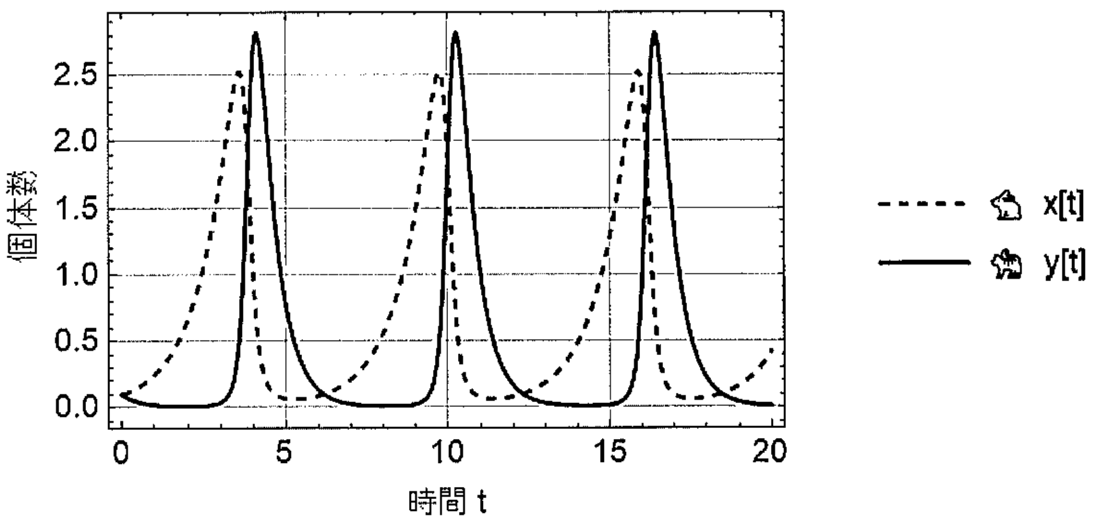


図 1　ウサギ・ヤマネコ系の典型的な解．$a = 1, b = 2, c = 3, d = 2, x(0) = y(0) = 0.1$.

4　基礎科目 ― 量子力学

1 次元調和振動子のシュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\psi(x)=E\psi(x)$$

を考える。

(1) 波動関数を $\psi(x)=\exp(-\alpha x^2/2)$ とおいて、エネルギー期待値

$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

を計算せよ。ここで H はハミルトニアン、α は正の実数である。また

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

が成り立つ。

(2) (1) で計算したエネルギー期待値が最小になる α を求めよ。また、そのときのエネルギー期待値を計算せよ。

次に、x^4 に比例するポテンシャルが加わった場合

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\lambda x^4\right]\psi(x)=E\psi(x)$$

を考える。$\lambda>0$ である。

(3) (1) と同様に、$\psi(x)=\exp(-\alpha x^2/2)$ とおいて、エネルギー期待値を計算せよ。

(4) λ の大きさが小さいとして、(2) で求めた α を用いて、(3) で求めたエネルギー期待値を計算せよ。

5　基礎科目 ― 熱・統計力学

N 個の粒子が等間隔に 1 列に並んでいる系を考える。各粒子はスピン (磁気モーメント) をもち、スピンは上向き ($\uparrow$)、下向き ($\downarrow$) の 2 つの状態のみをとる。隣り合った粒子のスピン間には相互作用が働いており、そのエネルギーは 2 つのスピンの向きが平行 ($\uparrow\uparrow$ or $\downarrow\downarrow$) のときは $-J$、反平行 ($\uparrow\downarrow$ or $\downarrow\uparrow$) の時は $+J$ である。この系について、次の問いに答えよ。なお、N は 2 以上の整数、$J \neq 0$ とし、絶対温度を T とする。

(1) N=2 の系に対する分配関数 Z_2 を求めよ。なお、N=2 では、1 つのペア (隣り合う 2 つの粒子の対) があると考え、スピンは上向き、下向きの 2 種類あるので、$\uparrow\uparrow$、$\downarrow\uparrow$、$\uparrow\downarrow$、$\downarrow\downarrow$ の 4 つの状態を取りうる。

(2) N=3 の系に対する分配関数 Z_3 を求めよ。なお、N=3 では、2 つのペアがあると考えることができ、$\uparrow\uparrow\uparrow$、$\downarrow\uparrow\uparrow$、$\uparrow\downarrow\uparrow$、$\downarrow\downarrow\uparrow$、$\uparrow\uparrow\downarrow$、$\downarrow\uparrow\downarrow$、$\uparrow\downarrow\downarrow$、$\downarrow\downarrow\downarrow$ の 8 つの状態を取りうる。

(3) N 個の粒子が 1 列に並んだ場合の分配関数 Z_N を求めよ。なお、この系では、$(N-1)$ 個のペアがあると考えることもできる。

(4) Z_N を用いてヘルムホルツの自由エネルギー F_N を求めよ。

(5) F_N を用いてエントロピー S_N を求めよ。

2023 年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
一般入試・外国人留学生入試
基礎科目試験
（数学基礎・情報基礎）

試験日：　2023 年 2 月 2 日（木）

試験時間：　9 時 30 分　～　12 時 00 分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4 問すべてに解答し，解答には各問あたり 1 枚の答案用紙を使用すること。（裏面使用可）

数 学 基 礎

【1】

[1] 以下の各問に答えよ.

(1) 関数 xa^x $(a > 0)$ を微分せよ.

(2) 極座標表示の曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の長さを求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 dxdy$ の値を求めよ. ただし $D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ とする.

[2] 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $\sqrt{1+2x}$ をマクローリン展開し, 0 でない最初の 3 項を求めよ.

(2) $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$ の近似値を, 小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ.

【2】

[**1**] 3次正方行列 A について固有値とそれに属する固有ベクトルを調べたところ, 以下の通りであった.

- 固有値は $3, 2, -1$ の三つ存在する.
- これらの固有値に属する固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$ である.

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(2) $|A|$ を求めよ.

(3) A として考えられるもののうち一つを挙げよ.

[**2**] 以下の命題が正しければそれを証明し, 正しくなければその反例を示せ. ここで, O は全ての要素が 0 である 2 次正方行列とする.

> M を 2 次正方行列としたとき, $M^2 \neq O$ かつ $M^3 = O$ を満たす M は存在しない.

情　報　基　礎

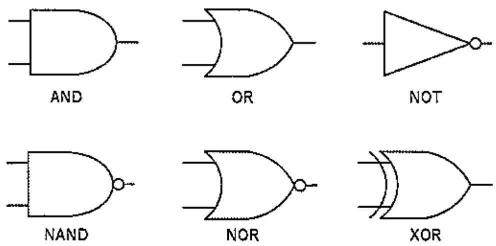
【1】

(1) 次の論理式が成り立つことを式の変形によって示せ．
$(A \to B) \equiv ((A \to \neg B) \to \neg A)$

(2) 次の論理式を選言標準形（積和標準形，Disjunctive normal form）で示せ．
$p \vee (q \wedge r) \to r \wedge q$

(3) 次の真理値を実現するなるべく簡単な論理回路を作り図示しなさい．ここで,「簡単な」の意味は使用する論理素子の数が少ないとする．また，図示する際に以下に示す論理素子を必要に応じて用いなさい．

入力			出力
p	q	r	s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



(4) (a) と (b) の "集合" を内包的表記（$\{x \in X | P(x)\}$ のような表記）で表せ．その際，自然数の集合を N とし，その他に必要な変数は自分で定義して用いること．

(a) 十進法で二桁の自然数のすべて

(b) 2 次元平面上の点で原点からの距離が 1 以下で x 座標が正の全体集合

【2】

以下のC言語で書かれた関数sortは, char型の文字の配列aに入っているn個の文字$a[0]$ 〜$a[n-1]$を昇順に整列するCのプログラムである. Cのchar型の値の間には, アルファベット順にしたがって, 'a' < 'b'　といった大小関係が定義されている. 各行の行頭には行番号を付してある.

```
1 int[] a = new int[n];
2 void sort(){
3   int i, j;
4   for (i=0; i<n; i++){
5     j = function(i);
6     swap (i, j);
7   }
8 }
```

関数sortは内部で関数functionと関数swapを使っている. このプログラムについて, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数swap(i, j)はa[i]とa[j]の文字を入れ替える関数である. この関数の定義を(C言語または類似のプログラミング言語で)書け.

(2) function(i)は引数iを入力とし, jを出力する関数である. この処理の内容について日本語で完結に説明をし, この関数の定義を(C言語または類似のプログラミング言語で)書け.

(3) nが6で配列aの初期状態がa[0]から順に

i	:	0	1	2	3	4	5
a[i]	:	d	o	g	c	a	t

であったとする. このときsort(); という呼び出しを行ったとき, 5行目でswap(i, j);が実行されるたびに, その直後の配列aの内容と, その時点での変数i, jの値を全て書き下せ.

(4) 一般に整列する文字数がnだったとき, 関数functionが呼ばれる回数をnを使って表せ. また, このプログラムの計算量をnを使って表せ.

(5) このsort関数で実現するソートの方法を何と呼ぶか. またこのソート方法のメリットとデメリットを述べよ. 他のソート方法と比較して述べても良い.