お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科

2022 年度入学試験(8 月期) 問題

一般選抜用

一般・基礎教育科目

(数学基礎)

理学専攻

数学コース用

試験日　2021 年8月19日
試験時間　9：30－11：30

注意事項

試験開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません

(1) この冊子は持ち帰ってください. 下書き用紙が不足するときや解答用紙を破損したときは手を挙げてください.
(2) 問題1 から問題2 まですべての問題に対して, それぞれ別の解答用紙に解答してください. 解答用紙は裏面を使ってもかまいませんが, そのむねを表面に明記してください.
(3) 印刷の不明瞭な部分, ページの脱落などがあった場合は申し出てください.

問題 1

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy + z$ とする.

(i) $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上での f の最大値, 最小値を求めよ.

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, z \geq 0\}$ 上での f の最大値, 最小値を求めよ.

(2) $f, f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ を連続関数とする.

(i) 関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が f に $[0, 1]$ 上一様収束することの定義を述べよ.

(ii) 関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が f に $[0, 1]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

となることを示せ.

(iii)

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & (0 \leq x \leq 1/(2n)), \\ -4n^2 x + 4n & (1/(2n) \leq x \leq 1/n), \\ 0 & (1/n \leq x \leq 1) \end{cases}$$

と定義する. このとき関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が各点収束する関数を求めよ. またその収束は $[0, 1]$ 上一様収束かどうか答えよ.

問題 2

M_n を複素 n 次正方行列全体のなす複素ベクトル空間とし，転置行列の複素共役を対応させる M_n の実線形変換 $M_n \ni X \mapsto {}^t\overline{X} \in M_n$ の固有値 λ の固有空間を H_λ とおく．

(1) 実線形写像 $\pi : M_n \to H_1$ でどの $X \in M_n$ に対しても $X - \pi(X) \in H_{-1}$ を満たすものがただ 1 つだけ存在することを示せ．また $U \in M_n$ と $X \in H_\lambda$ に対して，${}^t\overline{U}XU \in H_\lambda$ が成り立つことを確かめよ．

(2) 実ベクトル空間 H_1 と H_{-1} の次元をそれぞれ求めよ．

(3) $A \in M_n$ の複素行列としての階数を k とする．このとき，(1) で与えた実線形写像 π を用いて $F(X) = \pi(AX)$ と定義される実線形写像 $F : M_n \to H_1$ の階数を求めよ．

２０２２年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）
理学専攻・物理科学コース
８月入試問題
基礎科目試験
（物理科学に関する基礎科目）

試験日：２０２１年８月１９日（木）

試験時間：９：３０－１２：３０

注意事項

（１）５問すべて解答すること。（各問１００点）
（２）解答は各問あたり１枚の解答用紙に記入すること。
　（裏面使用可）
（３）答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。
（４）監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を
　開けないこと。
（５）試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目－力学

半径 a、質量 m の一様な材質でできた球が、水平面から θ 傾く粗い斜面を、静止状態から、滑らずに転がる。(図参照)このときの運動について以下の問いに答えよ。

[1] 半径 a、質量 m の一様な材質でできた球の中心軸回りの慣性モーメント I は $\frac{2}{5}ma^2$ で与えられる。これを慣性モーメントの定義 $I = \int r^2 dm$ を参考に導出しなさい。ただし、r は、回転軸から微分質量素片 dm までの距離である。

[2] 斜面方向の重心の加速度 $\frac{dv}{dt}$、および、回転運動の角加速度 $\frac{d\omega}{dt}$ が満たす運動方程式を書きなさい。ただし、ここでは、斜面と球の間の静止摩擦力を F とすること。

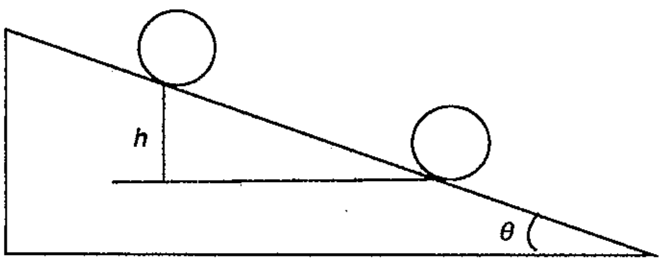
[3] 球が斜面を滑らずに転がる時に v と ω の間で満たされるべき関係式を答えなさい。

[4] [2][3]を用いて、静止摩擦力 F を求めなさい。

[5] 初期の静止状態から高低差 h だけ転がり落ちた直後の球の回転運動の角速度とそのエネルギーを求めなさい。

[6] [5]と同時刻の球の重心運動の速さとそのエネルギーを求めなさい。

[7] この時の運動を同じ球が滑らかな斜面を滑り落ちる時の運動と対比し解説しなさい。



図

2　基礎科目ー電磁気学

定常電流による静磁場について、以下の設問に答えよ。

(1) アンペールの法則 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i}$ より、ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{i}$$

を満たすことを示せ。$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$、$\mu_0$ は真空の透磁率、$\boldsymbol{i}$ は有限の領域に分布した電流密度である。$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ としてよい。

(2) ベクトル・ポテンシャル

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3 r'$$

は、問 (1) の方程式の解である。太さの無視できる閉回路 C に定常電流 I を流したとき、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}|^3}$$

と表せることを示せ。ここで $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ は位置 $\boldsymbol{s}$ における回路の電流方向の線素である。

(3) 図 1 のように、半径 a の 1 巻き円形コイルを流れる定常電流 I が、中心軸上の点 P に作る磁束密度を求めよ。座標軸は適当に定義してよい。

(4) 図 2 のように、半径 a の 1 巻き円形コイル A と B を、中心軸を合わせて間隔 b で配置した。両者に定常電流 I を流すとき、中心軸上の中点 O 近傍において、(i) 軸方向にほぼ一定な軸上磁場、または (ii) 軸方向にほぼ一定の勾配をもつ軸上磁場の 2 通りを得たい。電流の向きおよびコイル間隔の調節により、(i)、(ii) が実現できる条件をそれぞれ示せ。ここで、$x \ll 1$ のときに関数 $f(x)$ が、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

と級数展開で近似できることを参考にしてよい。

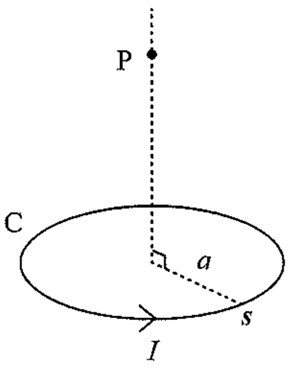


図 1

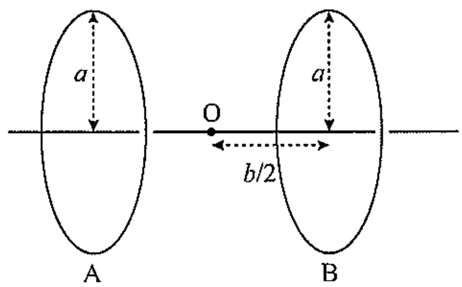


図 2

3　基礎科目－物理数学

(1) 3次元 xyz 空間上の原点 O を通る平面で、以下に示すベクトル $\vec{a}_1$ に直交するものをSとする。平面Sに平行で互いに直交する2つのベクトル $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ を以下のように定める。ベクトル $\vec{a}_2$ は、x 成分が1で z 成分が0であるものを選び、ベクトル $\vec{a}_3$ は3つのベクトル $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ が右手系をなすような単位ベクトルとする。以下の問いに答えよ。

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(a) ベクトル $\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ をそれぞれ求めよ。

(b) x, y および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ および $\vec{a}_3$ に移す線形変換を定める行列 A を求めよ。

(c) 問(b)で求めた行列 A の行列式を求めよ。

(d) 問(b)で求めた行列 A の逆行列 A^{-1} と、A^{-1} の行列式をそれぞれ求めよ。

(e) ベクトル $\vec{p} = (1, 1, 1)^T$ を $\vec{p} = p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + p_3\vec{a}_3$ と表示したとき、係数 p_1, p_2 および p_3 の値をそれぞれ求めよ。

(2) 以下の定積分をそれぞれ計算せよ。必要なら $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい。

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2x^2-2xy+5y^2)}dxdy$

4 基礎科目－量子力学

1 次元調和振動子の位置 $\hat{Q}$ と運動量 $\hat{P}$ を用いて演算子 $\hat{S} = \hat{Q} - x + iu(\hat{P} - y)$ を定義する。位置 $\hat{Q}$ と運動量 $\hat{P}$ は正準交換関係 $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ を満足する。この演算子 $\hat{S}$ に対して $\hat{S}|\psi\rangle = 0$ を満足する規格化された状態 $|\psi\rangle$ を考える。ただし、$\hbar$ は換算 Planck 定数、u は正の数、x と y は実数である。また、以下では演算子 $\hat{S}$ のエルミート共役を $\hat{S}^\dagger$ と表す。

(1) 状態 $|\psi\rangle$ における位置の平均値 $\langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle$ と運動量の平均値 $\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle$ を求めよ。

(2) 位置の揺らぎ $\Delta Q = \sqrt{\langle\psi|\hat{Q}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle^2}$ と運動量の揺らぎ $\Delta P = \sqrt{\langle\psi|\hat{P}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle^2}$ の間に $\Delta Q = u\Delta P$ が成り立つことを示せ。

(3) $\langle\psi|\hat{S}^\dagger\hat{S}|\psi\rangle = 0$ が成り立つことを用いて、位置の揺らぎ ΔQ と運動量の揺らぎ ΔP を求めよ。

(4) $\hat{S}|\psi\rangle = 0$ を満足する状態では、揺らぎの積 $\Delta Q\Delta P$ が最小になることを示せ。

(5) $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle = 0$ を満たす状態 $|\phi\rangle$ が存在しないことを示せ。

5　基礎科目－熱・統計力学

N 個の独立な粒子からなる系を考える。各粒子は、エネルギーが 0 または $\epsilon(>0)$ の 2 つの状態のみをとる。また、絶対温度を T とする。以下では 2 つの解法で系の内部エネルギーを導出する。

(1) 解法 1

(a) 分配関数 $Z(N,T)$ を求めよ。

(b) ヘルムホルツの自由エネルギー $F(N,T)$ を求めよ。

(c) 内部エネルギー $E(N,T)$ を求めよ。
導出する際は $Z(N,T)$ もしくは $F(N,T)$ を用い、その過程も示すこと。

(2) 解法 2

(a) この系の全エネルギーが $E=M\epsilon$ (M は 0 または正の整数) となるとき、微視状態の数 $W(N,M)$ を求めよ。

(b) エントロピー $S(N,M)$ を求めよ。ただし、N, $M \gg 1$、$N \gg M$ として、スターリングの公式 $\log N! \simeq N\log N - N$ を使ってよい。

(c) 内部エネルギー $E(N,T)$ を求めよ。
導出する際は $E=M\epsilon$ の関係と (2)-(b) の解を用い、その過程も示すこと。

2022年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科　(博士前期課程)

理学 専攻 ・ 化学・生物化学コース

(8 月 入 試)
(専 門 科 目)

試 験 日 : 2021 年 8月 19日 (木)
試験時間 : 9時 30分 ～ 12時 00分

【注意事項】

1. 監督者の「始め」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。

2. 5問中3問選択すること。(各問100点)

3. 解答は各問題分野あたり1枚の答案用紙に記入すること。
(裏面使用可)

4. 答案用紙の裏面を使用する場合は、用紙の上端から10 cm程度をあけて記入すること。

5. 解答番号欄に、選択した問題分野の番号を記入すること。

6. 試験中、用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。

1　物理化学

（1）　二次元の箱型ポテンシャルに閉じ込められた粒子の波動関数は、式(1)で表される。

$$\psi_{n_x,n_y} = \sqrt{\frac{4}{L_x L_y}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \qquad \text{式(1)}$$

ここで、L_x、L_yはx、y方向の箱の長さ、n_x、n_yは量子数を表す。

問1　粒子の質量を m としたとき、粒子のエネルギーを求めよ。

問2　図1は、ψ_{n_x,n_y}を等高線図で示したものである。図1(A)、(B)に示した波動関数に対応する量子数の組$\{n_x, n_y\}$をそれぞれ求めよ。

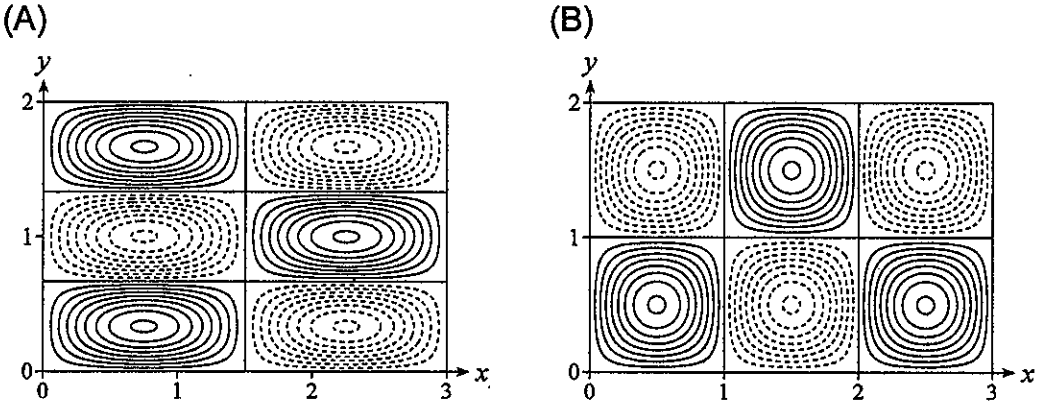


図1　波動関数ψ_{n_x,n_y}の等高線図。実線と破線は波動関数の符号の正負を表している。

問3　図1(A)、(B)の波動関数で表される状態はどちらが安定か。理由とともに答えよ。

問4　1, 3-cyclobutadiene の炭素原子の 2p$_z$ 軌道は、図2に示した4つの π 軌道を構成する。図2(A)–(D)の π 軌道を軌道エネルギーの順に並べよ。その理由も簡単に述べよ。

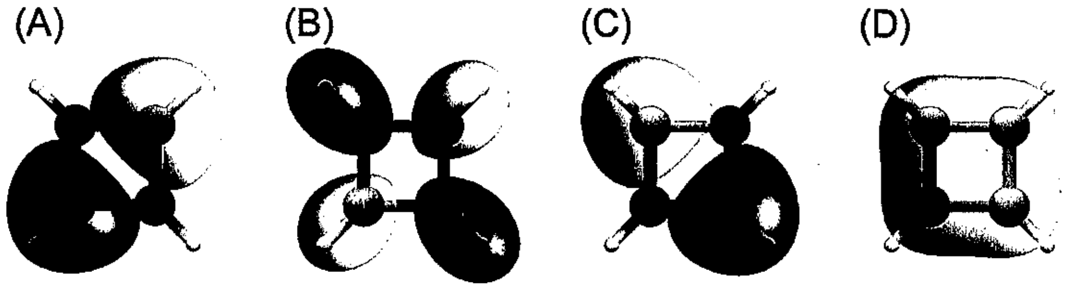


図2　1, 3-cyclobutadiene の炭素原子の 2p$_z$ 軌道が構成する π 軌道を C_4 軸上から見た模式図。分子軌道の白と黒は、π 軌道の符号の正負を表している。

問5　1, 3-cyclobutadiene の π 電子はどのようなポテンシャルの影響下で運動していると考えられるか。簡潔に述べよ。

（2） 溶液における溶媒Sの化学ポテンシャルは次の式(1)で表される。

$$\mu_S = \mu_S^* + RT\ln a_S \qquad 式(1)$$

ただし、$a_S = \gamma_S x_S$

ここで、μ_S^*は純粋な溶媒の化学ポテンシャル、x_Sはこの溶液における溶媒Sのモル分率である。

問1 a_Sとγ_Sの名称、およびそれぞれの次元もしくは単位を答えよ。

問2 $\gamma_S = 1$と近似できる条件を簡潔に述べよ。また、$\gamma_S = 1$が常に成立する溶液の名称を答えよ。

問3 閉鎖系におけるギブスの自由エネルギーの微小変化は$\mathrm{d}G = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T$と表される。温度一定の時、化学ポテンシャル$\mu$の圧力依存性（$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T$）をモル体積$V_m$を用いて表せ。温度を保って系を加圧すると化学ポテンシャルはどのように変化すると考えられるか。簡潔に述べよ。

問4 ある物質の化学ポテンシャルの温度変化が図3のようになっていたとする。ただし、圧力は一定とする。化学ポテンシャルが温度上昇とともに減少する理由を簡潔に述べよ。

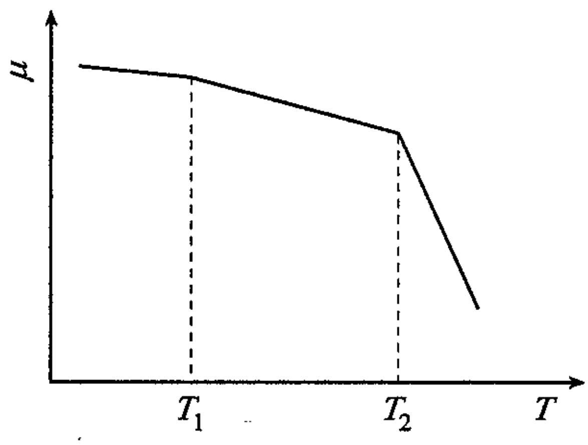


図3 ある物質の化学ポテンシャルの温度変化。

問5 温度T_2はこの物質の沸点である。この系が加圧されたときの化学ポテンシャルの温度依存性を定性的に示し、系が加圧されたときT_2がどのように変化するか簡潔に述べよ。

2 無機化学

（1） NX_3 型分子について次の問に答えよ。

（i） NH_3 と NF_3 の分子の概形を、結合の双極子モーメントがわかるようにそれぞれ図示せよ。

（ii） NF_3 は NH_3 よりも分子極性が小さい。この理由を説明せよ。

（2） ヘリウムは、He_2 としては存在しないがイオン化した He_2^+ は安定に存在しうることが知られている。この理由を分子軌道法の概念に基づいて定性的に説明せよ。

（3） 面心立方格子構造を持つ金属結晶について、次の問に答えよ。

（i） この結晶の格子定数を a として金属結合半径と空間充填率をそれぞれ導け。

（ii） この結晶の(100)表面および(111)表面にある原子の配位数をそれぞれ原子配列の図を示しながら答えよ。

（4） 結晶場理論を用いて、四面体4配位構造および八面体6配位構造のd軌道の分裂について説明せよ。また、同じ金属イオンおよび配位子で比較した場合、結晶場分裂パラメータはどちらの構造で大きくなると考えられるか理由とともに説明せよ。

（5） Hg(II)イオンのアクア錯体におけるアクア配位子とクロロ配位子の交換反応について、ある温度での平衡定数は以下の通りである。三段階目の交換反応において平衡定数 $\log K_{f3}$ が大きく減少している理由を説明せよ。

$$[Hg(OH_2)_6]^{2+}(aq) + Cl^-(aq) \rightleftarrows [HgCl(OH_2)_5]^+(aq) + H_2O(l) \quad \log K_{f1} = 6.74$$

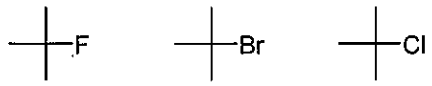
$$[HgCl(OH_2)_5]^+(aq) + Cl^-(aq) \rightleftarrows [HgCl_2(OH_2)_4](aq) + H_2O(l) \quad \log K_{f2} = 6.48$$

$$[HgCl_2(OH_2)_4](aq) + Cl^-(aq) \rightleftarrows [HgCl_3(OH_2)]^-(aq) + 3H_2O(l) \quad \log K_{f3} = 0.85$$

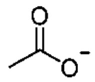
3 有機化学

（1） 次の(a)～(d)の各組の化合物、又は化学種について設問に答えよ。

(a) E2 反応の反応性の高いものから低いものに並べかえ、その理由を答えよ。



(b) 水溶液中の求核性の高いものから低いものに並べ替え、その理由を答えよ。

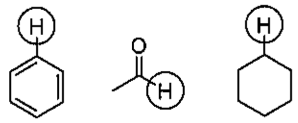


$^-SCH_3$　　^-OH

(c) 酸性度の高いものから低いものに並べ替え、その理由を答えよ。

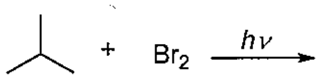
H_2S, H_2O, NH_3

(d) ○で囲まれたプロトンのNMRシグナルが低磁場側（高周波数側）に観測されるものから高磁場側（低周波数側）に観測されるものの順に並べ、その理由を答えよ。



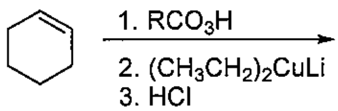
（2）次の反応で生じる主生成物を答えよ。複数の立体異性体が生じる場合には立体化学が分かるように全て記せ。

(a)

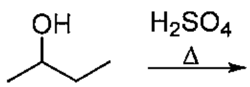


過剰

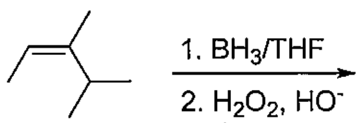
(b)



(c)



(d)

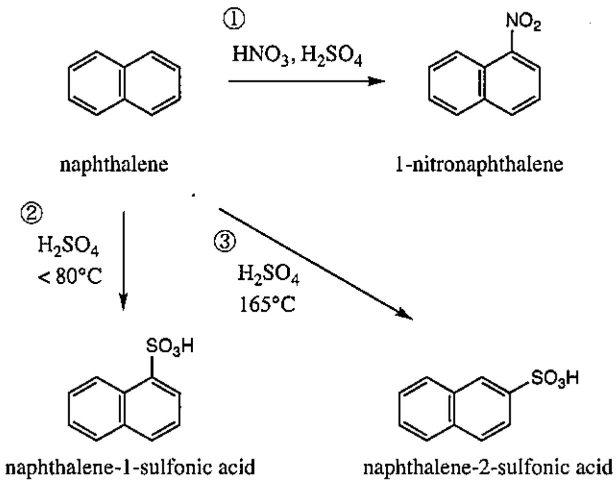


（3）芳香族化合物の求電子置換反応に関する以下の問いに答えよ。

(a) 硫酸を触媒とした、硝酸によるベンゼンのニトロ化の反応機構を記せ。

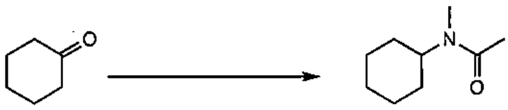
(b) ナフタレンのモノニトロ化は２種類の異性体の生成が考えられるが、主に 1−ニトロナフタレンを生成する。その理由を、中間体の安定性の比較から述べよ。（下図の反応①参照）

(c) 硫酸を用いてナフタレンのスルフォン化を行うとき、反応温度が 80 ℃以下では 1 位置換体が得られ、165 ℃では 2 位置換体が得られる。これを説明しなさい。（下図の反応②、③参照）

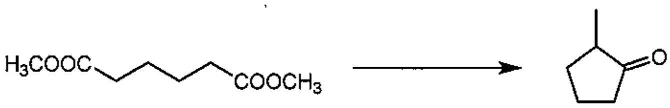


（4）左の化合物から右の化合物を合成する方法はいずれも複数の工程を用いる。合成法を示せ。また、(a)～(c)については、最初の工程の反応機構も示せ。

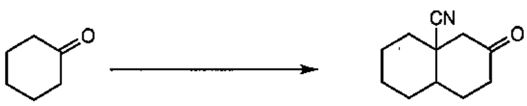
(a)



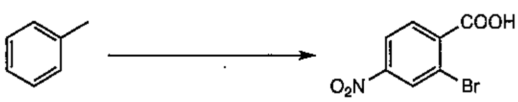
(b)



(c)



(d)



(e)

4　生物化学

生体分子の構造、機能、分析法に関する以下の問題に答えよ。

(1) タンパク質の構造において、「ペプチド結合は固くて平面的である」と表現されることがある。その理由として、最も適切と考えられることを記述せよ。(2行程度)

(2) ポリペプチド鎖中のプロリン残基はαヘリックスを安定化するか、不安定化するか。理由とともに答えよ。(2行程度)

(3) a)とb)の翻訳後修飾は、どのアミノ酸残基に付加するか。そのアミノ酸の①名称を書き、②その翻訳後修飾の細胞における役割を記述せよ。(2行程度)

a) リン酸化

b) ユビキチン化

(4) 金属イオンを含むタンパク質の例を一つ考え、①そのタンパク質の名称と結合するイオン種を書け。また、②そのタンパク質の機能における金属イオンの役割を記述せよ。(2行程度)

(5) a)〜c)にあげた各組み合わせの糖質の構造について、共通する特徴と異なる特徴を記述せよ。

a) セルロースとグリコーゲン

b) マルトースとラクトース

c) D-グルコースとD-フルクトース

(6) RNAはDNAより加水分解されやすい。その理由を構造式を用いて図示しながら説明せよ。

(7) 二本鎖DNAの*T*m値はGC含有率が高いほど高い。その理由を説明せよ。(2行程度)

(8) 制限酵素の*Eco*RIは①どのような生物種から単離された酵素か答えよ。また、その生物において②なぜ自身のゲノムDNAが切断されないのか、理由を説明せよ。

(9) アガロースゲル電気泳動によるDNAの分離について、①どのような原理に基づき何がわかるのか説明せよ。また、②DNAの検出には臭化エチジウムが用いられることがあるが、その検出の原理と使用上の注意点を説明せよ。

(10) PCR (polymerase chain reaction)の原理について5〜6行程度で説明せよ。用いる酵素や温度についても、なぜそのような酵素や温度を使用するのか、理由を含めて説明すること。

5　分析化学

（１）Ca^{2+}およびMg^{2+}を含む試料溶液をホールピペットで10 mLとり、0.02 mol/LのEDTA標準液で滴定し、それぞれの濃度を決定する。このとき、最も有効数字の桁数が大きい分析値となるよう、試料溶液を250 mLメスフラスコに調製する。用いる実験器具を、50 mLのビュレット（最小目盛りは0.1 mL）と1 mgまで測れる天秤とする。なお、使用するホールピペット、メスフラスコ、および標準溶液の有効数字は考慮しなくてもよいものとする。以下の問に答えよ。

(a) この滴定法を何と言うか。

(b) この滴定は２種類のpHで行う必要がある。その理由を記せ。

(c) 塩化カルシウム二水和物（式量：147.01）と塩化マグネシウム六水和物（式量：203.30）を使って試料溶液を作るとき、それぞれの質量を計算せよ。２種類のpHでの想定した滴定値も含めて計算過程を詳しく記すこと。

（２）溶液の透過度 T を測定することからその溶液中の物質のモル濃度Cを求めることができる。そのときの関係式は $\log(1/T) = \varepsilon CL$ である。ここでεはモル吸収係数、Lは溶液の光路長である。この関係式を導出せよ。

（３）以下の語句等について説明せよ

(a) 陰イオンクロマトグラフィーによるNi^{2+}とFe^{3+}の分離

(b) 水溶液中Cu^{2+}の定電位電解

(c) 水酸化ナトリウム水溶液を滴定剤として塩酸濃度を決定する際の標定

2022年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
一般入試・外国人留学生入試
基礎科目試験
（数学基礎・情報基礎）

試験日：　2021年8月19日（木）

試験時間：　9時30分　～　12時00分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4問すべてに解答し，解答には各問あたり1枚の答案用紙を使用すること。（裏面使用可）

数 学 基 礎

【問題１】

【１】 以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $\sin^{-1} x$ をマクローリン展開し，0でない最初の3項を求めよ．ただし，$\sin^{-1} x$ は逆正弦関数であり，主値をとるものとする．

(2) 不定積分 $I = \int e^x \cos x \, dx$ と $J = \int e^x \sin x \, dx$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ の極値を求めよ．

【２】 次の積分を実行せよ．

$$\iint_A x^2 dxdy$$

ただし領域 A は，楕円盤

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

とする．

【問題 2】

【1】 以下の行列を表現行列に持つ線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ を考える.

$$\begin{pmatrix} 2 & x & -6 \\ y & 8 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) f の像 $(\mathrm{Im} f)$ の次元が2であるとき，x, y の値を求めよ

(2) $\mathrm{Im} f$ の次元が2であるとき，$\mathrm{Im} f$ の基底を一組求めよ.

(3) f の核 $(\mathrm{Ker} f)$ の次元が1であるとき，$\mathrm{Ker} f$ の基底を求めよ.

【2】 次の行列 M に対し，以下の問いに答えよ.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) M を対角化せよ.

(2) $L^2 = M$ とする．L を求めよ.

情 報 基 礎

【問題１】

以下の C 言語で書かれた関数 match は，長さ n の（十分に長い）文字の並び（char 型の配列 t に格納されている）の中に長さ m の（n より短い）文字の並び（char 型の配列 p に格納されている）が含まれているかを調べ，含まれていたらその場所を整数で返し，含まれていなかったら NOT_FOUND を返す．各行の行頭には行番号を付してある．

関数 match は，中で関数 f を呼び出している．ここで NOT_FOUND と FOUND は互いに異なる適当な整数である．

```
1  int f (int i) {
2    int j;
3    for (j = 0; j < m; j++) {
4      if (p[j] != t[i + j]) {
5        return (NOT_FOUND);
6      }
7    }
8    return (FOUND);
9  }

10 int match () {
11   int i;
12   for (i = 0; ※※※; i++) {
13     if (f(i) == FOUND) {
14       return (i);
15     }
16   }
17   return (NOT_FOUND);
18 }
```

配列 t と p が，それぞれ

i :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
t[i] :	h	i	p	p	o	p	o	t	a	m	u	s	(n=12)
p[i] :	p	o	t	(m=3)									

であった場合について，以下の問いに答えよ．

(1) f(0); は何を返すか．その際，4 行目の条件部分は何回，実行されるか．

(2) 同様に f(3); は何を返すか．その際，4 行目の条件部分は何回，実行されるか．

(3) 関数 f の計算量はいくらか．m を用いて示せ．

(4) 関数 match の 12 行目の for 文の終了条件「※※※」はどのように設定すれば良いか．

(5) 上に示した t と p の場合，match (); は答えとして何を返すか．

(6) match (); を実行したとき，4 行目の条件部分が最も多く実行されるのは t と p がどのような場合か．m ≪ n であるような t と p の具体例を示した上で説明せよ．

(7) 関数 match の計算量はいくらか．m と n を用いて示せ．

【問題２】

(1) 次の各命題を否定した命題を書きなさい.

(a) $\forall x\ (x+1>x)$

(b) どんなに沢山勉強しても, 必ず勉強した範囲では解けない問題が出る.

(2) 次の論理式を $\vee$ と $\neg$ だけで表せ.

(a) $p \to q \vee r$

(b) $p \wedge \neg(q \wedge r) \to r \wedge q$

(3) 次の論理式を式変形によって恒真 T であることを導きなさい.

$(\forall x\ (A(x) \to B(x))) \to ((\exists x\ (A(x))) \to \exists x\ (B(x)))$

(4) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ の 2 項関係を考える. また, $\mathbb{Z}^+$ を正の整数の全体集合とする.

(a) $R=\{(a,b)\in A\times A \mid \exists n\in\mathbb{Z}^+, |a-b|=2n\}$ の要素を全て書きなさい.

(b) 反射律, 対称律, 推移律とはどのようなものか説明しなさい.

(c) R で反射律, 対称律, 推移律が成り立っていることをそれぞれの律における要素を示しながら説明しなさい.

(5) 写像 $f: A \to B$ における単射, 全射, 全単射の定義を示しなさい.