２０２２年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）
理学専攻・物理科学コース
２月入試問題
基礎科目試験
（物理科学に関する基礎科目）

試験日：２０２２年２月２日（水）

試験時間：９：３０－１２：３０

注意事項

（１）５問すべて解答すること。（各問１００点）

（２）解答は各問あたり１枚の解答用紙に記入すること。
　（裏面使用可）

（３）答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。

（４）監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を
開けないこと。

（５）試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目－力学

半径 a、質量 m の一様な材質でできた円板がある。この円板の円周に糸を巻きつけ、糸の一端を天井に固定し、その糸を鉛直にした状態で円板からそっと手を放した。以下の問いを参考に、その後の円板の運動を考えよう。ただし、円板の中心軸を通り鉛直な方向を x 軸にとり、円板の回転角速度を ω、糸の張力を T とすること。また、円板の横には図のような摩擦ゼロの壁があり、円板は鉛直方向にのみ並進運動をするものとする。

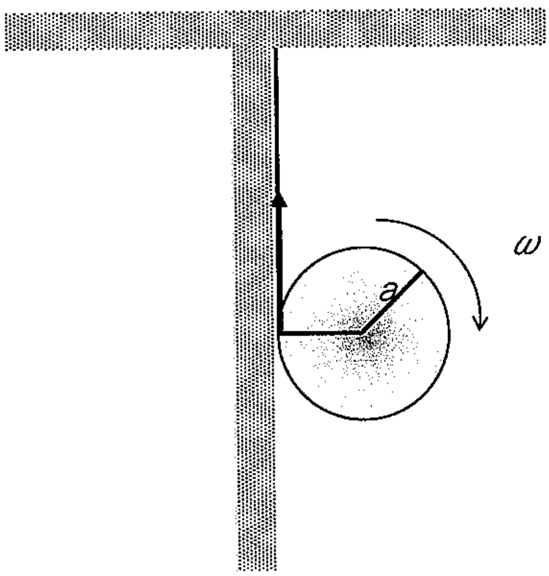
[1] 円板の板面に垂直な中心軸まわりの慣性モーメント I は $\frac{1}{2}ma^2$ で与えられる。これを慣性モーメントの定義 $I = \int r^2 dm$ を参考に導出しなさい。ただし、r は、回転軸から微分質量素片 dm までの距離である。

[2] 円板の重心運動の加速度 $\frac{dv}{dt}$、および、回転運動の角加速度 $\frac{d\omega}{dt}$ が満たす運動方程式を書きなさい。

[3] 糸の張力 T を求めなさい。

[4] 円板の重心が手を離した場所から高低差 h だけ運動した時の円板の重心運動の速度、および、回転運動の角速度を求めなさい。

[5] またこの時の円板のエネルギー状態について解説しなさい。



2　基礎科目 ー 電磁気学

電流のない系において、静磁場が $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$、$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ を満たすことを用いてよい。$\boldsymbol{H}$ は磁界の強さ、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度である。以下の設問に答えよ。

(1) 磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ が座標 $\boldsymbol{r}$ につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}_m$ は

$$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\right), \quad \nabla \equiv \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

で与えられる。$\boldsymbol{m}$ が原点 O にあるとして、図 1 のように極座標をとるとき、$\boldsymbol{B}_m$ の r、θ、φ 成分を求めよ。

(2) 2 つの物質の境界面を磁界が貫いているとき、$\boldsymbol{H}$ または $\boldsymbol{B}$ について、境界面で①接線成分が連続なのはどちらか、また②法線成分が連続なのはどちらか、理由となる式を含めて答えよ。証明する必要はない。境界面に電流はないものとする。

高透磁率の軟磁性体は、集磁作用が高く磁気シールドとして機能する。以下の系でそれを確かめよう。図 2 を系の断面図として、空気中（透磁率 μ_0）に、中空の軟磁性体の球（透磁率 μ、外半径 a、内半径 b）があるとする。球は外部からの一様な磁界 $\boldsymbol{H}_0$ の中に置かれており、電流は流れていない。中空部分も空気で満たされているとする。また軟磁性体内では、$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ が成り立つとする。

(3) 磁力線の概形を示せ。

(4) 外半径 a が 10 cm、肉厚 $\delta(\equiv a - b)$ が 1 mm の軟磁性体（$\mu^* = \mu/\mu_0 = 10^4$）を用いたとすると、中空部分の磁界の強さは $3a\boldsymbol{H}_0/(2\mu^*\delta)$ と近似できる。このとき、外部からの磁界は中空部分で約何 % 減少しているか求めよ。

中空部分の磁界を詳しく求めてみよう。図 2 のような系では、外部磁界 $\boldsymbol{H}_0$ の方向を z 方向、中空の中心を原点 O とすると、各領域の磁界は、「(i) z 方向の一様磁界」および「(ii) 原点 O にある z 方向を向いた磁気双極子がつくる磁束密度」の重ね合わせとして書ける。(i)、(ii) は領域ごとに異なる。

(5) 無限遠方で磁界は $\boldsymbol{H}_0$ となること、中空の中心で磁界は有限であること、および境界面での連続条件を適切に与えることで、中空部分の磁界が

$$\left(1 + \frac{2\left(\mu^* - 1\right)^2}{9\mu^*}\left[1 - \frac{b^3}{a^3}\right]\right)^{-1}\boldsymbol{H}_0$$

となることを示せ。

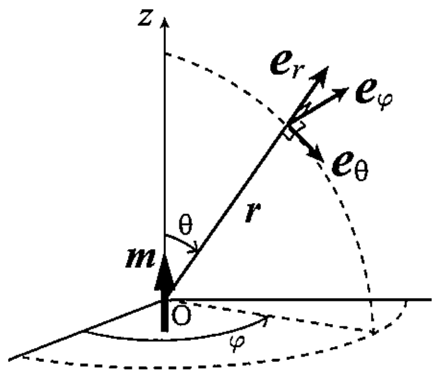


図１　e_i は i 方向の単位ベクトル.

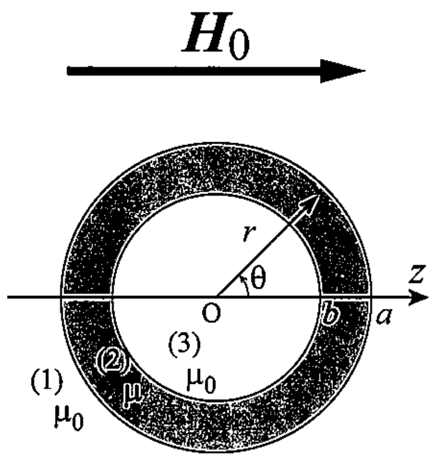


図２　系の断面図. 領域 (1) は球の外部、(2) は中空の軟磁性体の球、(3) は中空部分である. 系に電流はない.

3　基礎科目－物理数学

(1) 3次元 xyz 空間内の点 $\vec{x}$ に対して、$r = |\vec{x}|$ とする。

(a) $\mathrm{div}(\vec{x})$ と $\mathrm{rot}(\vec{x})$ をそれぞれ求めよ。

(b) $\mathrm{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right)$ を求めよ。ただし、$r > 0$ とする。

(2) 次の定積分を計算せよ。

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy.$$

(3) 以下の微分方程式を解け．ただし、a, b は正の定数とする．

(a) 初期条件 $f(0) = 0$ の下で、$x > 0$ における $a\dfrac{df(x)}{dx} + f(x) - b = 0$ の解を求めよ．

(b) $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ として、以下の微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(x)}{dx} = -2y_1(x) + y_2(x) \\ \dfrac{dy_2(x)}{dx} = y_1(x) + 2y_2(x) \end{cases}$$

4　基礎科目ー量子力学

ハミルトニアンが $\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\hbar\omega \\ \frac{1}{2}\hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる２準位系を考える。初期時刻 $(t = 0)$ における２準位系の状態は $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる。ただし、$\hbar$ は換算プランク定数、ω は正の定数である。

(1) この２準位系の取り得るエネルギーの値と対応する固有状態を全て求めよ。以下では、求めた励起状態を $|e_1\rangle$、基底状態を $|e_2\rangle$ と表す。

(2) 時刻 t における２準位系の状態を $|\psi(t)\rangle = a_1(t)|e_1\rangle + a_2(t)|e_2\rangle$ の形に展開するとき、シュレーディンガー方程式から係数 $a_1(t)$ と $a_2(t)$ が満たす方程式を求めよ。

(3) 時刻 t における２準位系の状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ。

(4) 時刻 t において２準位系の物理量 $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を測定するとき、可能な測定結果 m とその結果が得られる確率 $P(m)$ を求めよ。

(5) 測定結果 m が得られた直後の２準位系の状態を説明せよ。

(6) 時刻 t における物理量 $\hat{\sigma}_z$ の平均値 $\langle\hat{\sigma}_z(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{\sigma}_z|\psi(t)\rangle$ と揺らぎ $\Delta\sigma_z(t) = \sqrt{\langle\psi(t)|(\hat{\sigma}_z - \langle\hat{\sigma}_z(t)\rangle)^2|\psi(t)\rangle}$ を求めよ。

5　基礎科目ー熱・統計力学

エネルギー E が 0 または $\epsilon(>0)$ の 2 準位系にスピン S=1/2 のフェルミ粒子、または S=1 のボーズ粒子があるとき、磁場印加中におけるヘルムホルツの自由エネルギーを考える。磁場 H を印加させたとき、角運動量 $\hbar\boldsymbol{S}$ をもつスピンのゼーマンエネルギーは $-2\mu_B S_z H$ である。ただし S_z は、S=1/2 では $S_z=\pm1/2$ の 2 つの値、S=1 では $S_z=\pm1$、0 の 3 つの値をとりうる。また、μ_B はボーア磁子とよばれる定数であり、粒子間の相互作用はないとする。なお、絶対温度として T を用いること。

(1) 2 準位系に S=1/2 のフェルミ粒子が 1 個あるとき、H 印加中の分配関数 Z_{F1} を求めよ。
(2) Z_{F1} を用いてヘルムホルツの自由エネルギー F_{F1} を求めよ。

(3) 2 準位系に S=1 のボーズ粒子が 1 個あるとき、H 印加中のヘルムホルツの自由エネルギー F_{B1} を求めよ。

(4) 2 準位系に S=1/2 をもつフェルミ粒子が 2 個あるとき、H 印加中のヘルムホルツの自由エネルギー F_{F2} を求めよ。

(5) S=1 をもつボーズ粒子が 2 個あるとき、H 印加中のヘルムホルツの自由エネルギー F_{B2} を求めよ。ただし、低温で磁場が弱い場合 ($k_BT,\ \mu_BH \ll \epsilon$) を考え、$E$=0 のみに S=1 をもつボーズ粒子が 2 個あるとしてよい。

2022年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
一般入試・外国人留学生入試
基礎科目試験
（数学基礎・情報基礎）

試験日：　2022年2月2日（水）

試験時間：　9時30分　～　12時00分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4問すべてに解答し，解答には各問あたり1枚の答案用紙を使用すること。(裏面使用可)

数学基礎

【問題１】

【１】 以下の各問に答えよ。

(1) 関数 $\log(1-x)$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ。ただし，剰余項は書かなくてよい。

(2) $\dfrac{\log 2022}{\log 45}$ の値を小数第 1 位を四捨五入し，整数値で求めよ。

なお，必要があれば近似値 $\log 45 = 3.80666$ を用いよ。

【２】 $n \geq 0$ に対して定積分

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

とおくとき，以下の各問に答えよ。

(1) I_0 と I_1 を求めよ。

(2) $\dfrac{d}{dx}\left((4-x^2)\sqrt{4-x^2}\right) = -3x\sqrt{4-x^2}$ を示せ.

(3) I_{n+1} と I_n の関係式を求めよ。

(4) I_n を求めよ。

【問題２】

A_1 を n 次正方行列とする。A_1^{-1} を A_1 の逆行列とし，

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ \mathbf{0} & A_1^{-1} \end{pmatrix}$$

とする。
また，同様に，$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ に対して，

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{k-1} & A_{k-1} \\ \mathbf{0} & A_{k-1}^{-1} \end{pmatrix}$$

とする。
A_k について，以下の各問に答えよ。

【１】 (1) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ に対して，正方行列 A_k が存在することを示せ。また，逆行列 A_k^{-1} を求めよ。

(2) A_k の型を求めよ。

(3) A_k の行列式を求めよ。

【２】 λ を A_1 の固有値とする。このとき，以下の問を答えよ。

(1) $\forall k \geq 2$ に対して λ が A_k の固有値であることを示せ。

(2) $\forall k \geq 2$ に対して $\lambda^2 \neq 0$ かつ $\lambda^2 \neq 1$ であるとき，$\frac{1}{\lambda}$ が A_k の固有値であることを示せ。

情　報　基　礎

【問題１】

論理回路に関する以下の問題に答えよ。

(1) 図 1(a) は「半加算器」と呼ばれる論理回路の例で，A および B の 2 変数に 0 または 1 のいずれかの値が入力されたときの S および C の出力値を示したものである。この図で (1)(2) に搭載されるべき論理回路は以下の (a)〜(f) のどれか，(1)(2) の各々について解答せよ。

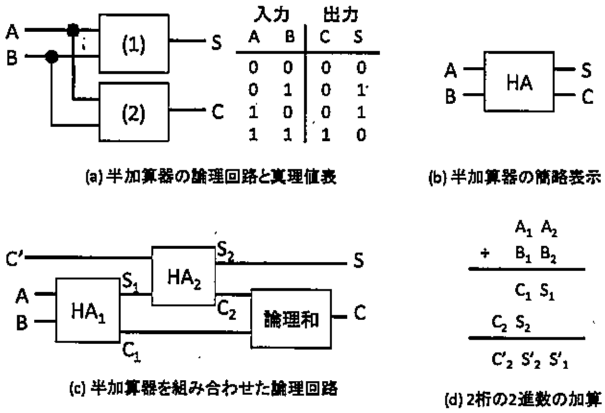
(a) 論理積	(b) 論理和	(c) 否定
(d) 否定論理積	(e) 否定論理和	(f) 排他的論理和

(2) (1) において S と C の 2 変数はそれぞれ何を意味するかを説明せよ。

(3) 図 1(a) を簡略化したものを図 1(b) に示す。また，これを 2 個組み合わせて作った論理回路を図 1(c) に示す。ここで A,B,C' の 3 変数に 0 または 1 のいずれかの値が入力されたとき，S と C の値はどうなるか。図 1(a) と同様な形式の真理値表を書け。

(4) (3) において S と C の 2 変数はそれぞれ何を意味するかを説明せよ。

(5) 2 桁の 2 進数の加算を考える。下位桁が A_2 で上位桁が A_1 である変数と，下位桁が B_2 で上位桁が B_1 である変数の加算を，筆算形式で表したものが図 1(d) である。この演算を実現する論理回路を，図 1(c) と同様な形式で答案用紙に図示せよ。またその中に，図 1(d) に書かれている全ての変数を明記せよ。



(a) 半加算器の論理回路と真理値表　(b) 半加算器の簡略表示

(c) 半加算器を組み合わせた論理回路　(d) 2桁の2進数の加算

図 1: 論理回路の例

【問題２】

半径 $R=1$ の円に内接する正 n 角形の面積 $S_n(n \geq 3)$ を計算する。

(1) S_3,S_4 の値を求めよ。

(2) $\sin(\theta)$ のマクローリン展開の最初の 3 項を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ はどのような値に収束するか解答せよ。

(4) $\sin(\theta)$ の概算値を θ とする概算はこの計算に用いると問題が生じる. その理由を述べよ。

(5) S_n を $n=3$ から順に計算し S_n の値が 3.00 を超えたときに終了するプログラムを記述せよ.
言語はなにを用いてもよい。

(6) 上記 5 のプログラムを実行したとき n がいくつの時にプログラムが停止するか求めよ。