# ２０２１年度　お茶の水女子大学大学院
# 人間文化創成科学研究科（博士前期課程）
# 理学専攻・物理科学コース
# ２月入試問題
# 基礎科目試験
# （物理科学に関する基礎科目）

試験日：２０２１年２月３日（水）

試験時間：９：３０－１２：３０

注意事項

（１）５問すべて解答すること。（各問１００点）
（２）解答は各問あたり１枚の解答用紙に記入すること。
（裏面使用可）
（３）答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。
（４）監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を
開けないこと。
（５）試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目－力学

高速で廻っているコマが倒れないのはなぜか，その理由を実験や観測で検証する方法も含めて，ニュートンの運動方程式から詳述してください．

【付記】　コマや一般に剛体は相対位置の固定した質点の集合体である．

## 2　基礎科目－電磁気学

古典的な原子のモデルとしてトムソン模型を考える。以下の問に答えよ。電子の質量を $m_e$、真空中の光速度と誘電率をそれぞれ $c$, $\epsilon_0$ とする。必要であれば以下の数値を用いて良い。

$$c = 3 \times 10^8 \ \mathrm{m/s}, \quad m_e = 9 \times 10^{-31} \ \mathrm{kg}, \quad e = 2 \times 10^{-19} \ \mathrm{C}, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$$

その他、解答に必要な記号は定義して導入すること。

1. 原子の模型として、内部に正電荷が一様に分布した、半径 $R$ の球を考える。この球全体の電荷を $e$ とする。中心からの距離 $r$ $(< R)$ における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。
2. 球の中心から $r$ $(< R)$ の位置にある電子（電荷は $-e$）は単振動することを示せ。
3. 荷電粒子の単振動に伴って電磁波が放射される。この原子模型から放射される電磁波が線スペクトル（波長が一定）になることを示せ。
4. 観測された原子のスペクトルの波長 $\lambda$ が $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ m のとき、この模型から示唆される原子の典型的な大きさ（球の半径）$R$ のオーダーを求めよ（数値の評価においては説明を添えた上で適当な近似を使ってよい）。
5. この「原子」を $z$ 方向に一様な磁束密度 $B = (0, 0, B)$ の磁場中に置く。電子の運動方程式を $x, y, z$ 方向に分けて求め、原子から放射される電磁波の特徴について説明せよ。

# 3　基礎科目－物理数学

次の問いに答えよ。

(1) $x$、$y$ を二次元極座標に変換し、次の二重積分の値を求めよ。
なお、積分領域 $D$ は $0 \leq (x^2+y^2) \leq a^2$ である。

$$\int\int_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

(2) 複素平面上の積分路 $c$ は円 $|z-\pi/2|=\pi$ を正の向き（反時計回り）に一周するものとして、次の積分の値を求めよ。

$$\int_c \frac{-z^2+1}{z(z+1)^3}dz$$

(3) $y$ は $x$ の実関数であるとし、次の微分方程式の一般解を求めよ。
ただし、$y=x$ が対応する同次方程式の解になっていることを利用してよい。

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = x^2$$

(4) 次の関数の点 $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ。

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

# 4　基礎科目－量子力学

１次元系において、調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

と表される。ここで、$m$ は質量、$\omega$ は角振動数、$X$, $P$ はそれぞれ位置演算子、運動量演算子とする。

(1) $X$ に対して $X|x\rangle = x|x\rangle$ であるとき、$P|x\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial x}|x\rangle$ である。このとき、交換関係 $[X, P] = i\hbar$ を確かめよ。

(2) ハミルトニアン $H$ の固有値が $\hbar\omega/2$ のときの規格化された固有関数は

$$\psi_0(x) = C\mathrm{e}^{-bx^2/2}$$

と表される。ここで $C$ と $b$ は正の実定数であるとする。$C$ と $b$ を求めよ。

必要に応じて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-Bx^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{B}}$$

$(B > 0)$ を用いてよい。

(3) 位置と運動量のゆらぎはそれぞれ $(\Delta X)^2 = \langle(X - \langle X\rangle)^2\rangle$、$(\Delta P)^2 = \langle(P - \langle P\rangle)^2\rangle$ として与えられる。ここで、$\langle A\rangle$ は物理量 $A$ の平均値である。問 (2) の波動関数を用いて、$(\Delta X)^2$、$(\Delta P)^2$ をそれぞれ求めよ。

(4) ハミルトニアン $H$ の固有値が $\hbar\omega(n + 1/2)$ のときの固有関数は

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n!}}\psi_0(x)H_n\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\right)$$

と与えられる $(n = 0, 1, 2, \cdots)$。ここで、$H_n(x)$ は $n$ 次のエルミート多項式であり、$H_n(x) = (-1)^n\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{d^n}{dt^n}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ である。

$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ として、(i) $a\psi_0(x) = 0$, および (ii) $a\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x)$, $(n \geq 1)$ を示せ。

ここで、必要ならば、漸化式 $\frac{d}{dx}H_n(x) = nH_{n-1}(x)$ , $(n \geq 1)$ を用いてよい。

# 5 基礎科目－熱・統計力学

$z$ 軸の正の方向に掛けられた大きさ $h$ の磁場中で、$N$ 個の大きさ 1/2 のスピンが絶対温度 $T$ の熱平衡状態にある。このシステムのハミルトニアンは $\hat{H} = -ah\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_z^{(j)}$ で与えられる。ただし、$\hat{\sigma}_z^{(j)}$ は $j$ 番目のスピンの $z$ 成分のパウリ行列であり、$a$ は正の定数である。各スピンのパウリ行列は $\sigma_x^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$、$\sigma_y^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$、$\sigma_z^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

(1) システムの分配関数 $Z$ を求めよ。

(2) システムのヘルムホルツの自由エネルギー $F$ を求めよ。

(3) システムの平均エネルギー $U$ を求めよ。

(4) 定係数を除けばシステムのスピンの $z$ 成分の平均値は $S_z = \langle\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_z^{(j)}\rangle$ で与えられる。このとき、$S_z = -(1/a)(\partial F/\partial h)_T$ が成り立つことを示せ。ただし、$\langle\cdots\rangle$ は熱平衡状態での平均を表す。

(5) システムのスピンの $z$ 成分の平均値 $S_z$ を求めよ。

(6) $i$ 番目のスピンの $z$ 成分と $j$ 番目のスピンの $z$ 成分を測定したとき、２つの測定結果が等しくなる確率を求めよ。ただし、$i \neq j$ である。

(7) $i$ 番目のスピンの $x$ 成分と $j$ 番目のスピンの $x$ 成分を測定したとき、２つの測定結果が等しくなる確率を求めよ。ただし、$i \neq j$ である。

# 2021年度　お茶の水女子大学
# 人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

## 理学専攻・情報科学コース
## 外国人留学生入試
## 基礎科目試験
## （数学基礎・情報基礎）

試験日：　2021年2月3日（水）

試験時間：　9時30分　～　12時00分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4問すべてに解答し，解答には各問あたり1枚の解答用紙を使用すること。（裏面使用可）

# 数 学 基 礎

【問題１】

【１】 以下の各問に答えよ.

(1) 関数 $\cosh x$ をマクローリン展開し，$x^4$ の項まで求めよ.

(2) 不定積分 $\int \sin^{-1} x dx$ を求めよ．ただし，$\sin^{-1} x$ は逆正弦関数であり，主値をとるものとする.

(3) 関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy - 5$ の極値を求めよ.

(4) 積分 $\iint_D (2x + y) dxdy$ の値を求めよ.
ただし $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ とする.

【２】 2変数関数 $g(x, y) = 3x + 5y - 2$ について以下の各問に答えよ.

(1) $\frac{\partial g}{\partial x}$ と $\frac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 関数 $g(x, y)$ が条件 $x^2 + y^2 = 4$ のもとで極値をとる候補点を求めよ.

【問題 2】

【1】 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。

（1）det(A)=0 となるように $a$ を求めよ。

（2）求めた $a$ の値を代入して、行列 A の核　Ker (A) $=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \middle| A\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}$ を求めよ。

（3）求めた $a$ の値を代入して、行列 A の像　Im (A) $=\left\{A\mathbf{x} \middle| \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\right\}$ を求めよ。

【2】

(1) $\mathbb{Z}_2$ 上の 2 次正則行列を全て求めよ。

$\mathbb{Z}_2$ は $\{0,1\}$ の集合で、演算は以下のように定義される。

| $+$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\times$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

(2) それぞれの行列の逆行列を求めよ。

# 情　報　基　礎

【問題3】

図1は，あるタスクをこなすC言語のプログラムである．その実行結果は図2のようになり，また，プログラムの5行目を

```
int array[MAX_LENGTH] = { 1,7,9,4,10 };
```

のように変えた場合は，その結果が図3のようになるとする．ただし，両方の結果とも上から順に出力されているものとする．

```
#include <stdio.h>
#define MAX_LENGTH  5

int main(){
  int array[MAX_LENGTH] = { 5,2,3,1,4 };
  int i,j,k,tmp;
  for(i = 0;i < MAX_LENGTH ; i++){
    for(j = i+1; j < MAX_LENGTH ; j++){
      if(array[i] < array[j]){



      }
    }
    for(k=0; k< MAX_LENGTH; k++){
      printf(''%d'',array[k]);
    }
    printf(''\n'');
  }
}
```

図 1: C言語プログラム

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 5 | 4 | 2 | 1 | 3 |
| 5 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

図 2: 実行結果

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 7 | 4 | 9 |
| 10 | 9 | 1 | 4 | 7 |
| 10 | 9 | 7 | 1 | 4 |
| 10 | 9 | 7 | 4 | 1 |
| 10 | 9 | 7 | 4 | 1 |

図 3: 実行結果

この時，以下の問いに答えよ．

1. 図1のプログラムの行番号10から12に入るプログラムを示しなさい．
2. 1. で完成させたプログラムを元にこのプログラムは何をするものか1行程度の文章で説明しなさい．
3. このプログラムの計算量をその算出根拠と共に示しなさい．
4. 図1のプログラムの `int main()` の中身を改良して，以下の手順を実行するプログラムを示しなさい．
    - (i) 配列の先頭要素を最大値と仮定する．
    - (ii) 配列の2番目以降の要素と先頭の要素（最大値と仮定したもの）と大きさを比較し，一番大きな要素を発見し、そのインデックスを記録する．
    - (iii) 記録したインデックスの要素と先頭のインデックスの要素を交換する．
    - (iv) 交換された結果をprintf文にて表示する．
    - (v) 先頭のインデックスをインクリメントし，(i)からの処理を先頭のインデックスがリストの要素すべてを指し終わるまで繰り返す．
5. 4. において作成したプログラムにリスト `[1,3,4,5,2]` を与えた際に，リストの中の数値の順番が変わっていく過程を示しなさい．
6. 図1のプログラムと4. において作成したプログラムを計算効率でその違いを捉えるとどのように差別化できるか答えなさい．

【問題 4】

エジプト分数表記法とは、任意の分数を互いに相異なる単位分数 (分子が1の分数) の和で表す方式を意味するとする。
例として、$\frac{2}{5}$ は $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ ではなく $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ と表す。

(1) $\frac{2}{3}$ をエジプト分数表記法で表せ。

(2) この表記法は一通りに定まるか?あるいは複数存在するか?一通りに定まる場合にはそれを証明し、複数存在する場合にはその例を示せ。

(3) 任意の正の整数 $x, y (x < y)$ について $y = a \cdot x + r; (x > r \geqq 0, a \geqq 0)$ となる 整数 $a, r$ が存在して

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{a+1} + \frac{x-r}{y(a+1)}$$

が成り立つことを示せ。

(4) この式を利用し、任意の分数をエジプト分数表記法で表示するためのアルゴリズムを記述せよ。 記述に用いるプログラム言語は擬似コード, C, C#, Common Lisp, Java, JavaScript, Mathematica, OCaml, Perl, Python, Ruby, Scheme のいずれでもよい。