2020年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学　専攻・　物理科学　コース

2 月 入 試 問 題
基 礎 科 目 試 験 問 題
（物理科学に関する基礎科目）

試　験　日　：　2020 年 2 月 4 日(火)

試験時間　：　9 時 30分 ～ 12時 30分

【注意事項】

1. 5問すべて回答すること。(各問100点)
   解答は各問あたり1枚の解答用紙に記入すること。(裏面使用可)
2. 答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。
   監督者の「始め」の合図をするまで、問題冊子を開けないこと。
3. 試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1 基礎科目－力学

質量 m の質点が 2 次元平面上で行う運動を考える。以下の問に答えなさい。ただし 2 次元直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1}$$

で与えられるとき、任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の (A_x, A_y) 成分と (A_r, A_θ) 成分の間に

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \cos\theta + A_y \sin\theta, \\ A_\theta &= -A_x \sin\theta + A_y \cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

の関係が成り立つとしてよい。

1. 質点の速度 $\boldsymbol{v}$ および加速度 $\boldsymbol{a}$ の x, y 成分、すなわち $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}$ および $a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}$ を $r(t), \theta(t)$ およびそれらの時間微分で表しなさい。ただし記号「$\dot{}$」および「$\ddot{}$」は時間に関する 1 階および 2 階微分を表す。

2. 質点が持つ加速度の動径方向成分 a_r と角度方向成分 a_θ を問 1 の結果と式 (2) を用いて求め、外力 $\boldsymbol{F}$ のもとで質点が従う、極座標での運動方程式が

$$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right), \quad F_\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right), \tag{3}$$

となることを示しなさい。ただし外力 $\boldsymbol{F}$ の動径方向、角度方向の成分をそれぞれ F_r, F_θ とする。

3. 中心力 $(F_r \neq 0, F_\theta = 0)$ による質点の運動を考える。問 2 で求めた運動方程式から質点の角運動量が保存することを示しなさい。ただし角速度 $\omega \equiv \dot{\theta} = d\theta/dt$ を用いてもよい。

これ以降の問題では、これまでの議論を万有引力に基づく太陽と地球の運動に適用する。

4. 太陽の質量と地球の質量をそれぞれ m_S および m_E とする。$m_E \ll m_S$ のとき、この 2 体系の相対運動は太陽を原点とする地球の運動と見なせることを示しなさい。(注) 2 体系の相対運動は換算質量 μ を持つ質点が重心に対して行う運動のことである。

5. 問 3 で用いた運動方程式より力学的エネルギー保存則を導きなさい。

6. 問 5 の結果より、地球が描く軌跡が円軌道になるための条件を求めなさい。

2 基礎科目ー電磁気学

電磁場のエネルギー保存則は, 電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ に対して

$$\vec{S} = \mu_0^{-1}\vec{E} \times \vec{B}, \quad u = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{B}^2}{\mu_0} + \epsilon_0 \vec{E}^2\right)$$

を使って,

$$\dot{u} + \vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \tag{1}$$

とあらわされる. ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空中の誘電率と透磁率で, $\vec{j}$ は電流密度である. 次を考えてください.

1. 式 (1) がなぜエネルギーの保存を意味するのか, わかりやすく説明すること. 言い換えても良い.
2. 上の $\vec{S}$ は電磁場のエネルギー流ですが, 具体的に 1 つ例を挙げてそのことを示すこと.
3. 平行板コンデンサに, 板に平行に一様磁場をかけると, 上記 $\vec{S}$ が計算されるが, 本当にエネルギーが流れているのか?
4. 銅線を使って電球を電池につないだ時の $\vec{S}$ を図示すること.

[参考]
電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ が従う真空中の Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho/\epsilon_0, \\
\mu_0^{-1}\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} &= \vec{j}
\end{aligned}$$

となる. ここで ρ, $\vec{j}$ はそれぞれ電荷, 電流の密度です. また, 電荷 e, 質量 m, 位置 $\vec{z}(t)$ の荷電粒子に対する運動方程式は

$$m\ddot{\vec{z}} = e\vec{E} + e\dot{\vec{z}} \times \vec{B}$$

です.

3 基礎科目－物理数学

1. 次の問いに答えよ。

(1) 実ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$、および、定ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{e}_x + \omega_y\boldsymbol{e}_y + \omega_z\boldsymbol{e}_z$ より、ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ を定義する。以下を求めよ。ただし、$\boldsymbol{e}_j$ $(j = x, y, z)$ は xyz 座標系における j 軸方向の単位ベクトルである。

(i) $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$　(ii) $\nabla \times \boldsymbol{v}$

(2) パウリ行列は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

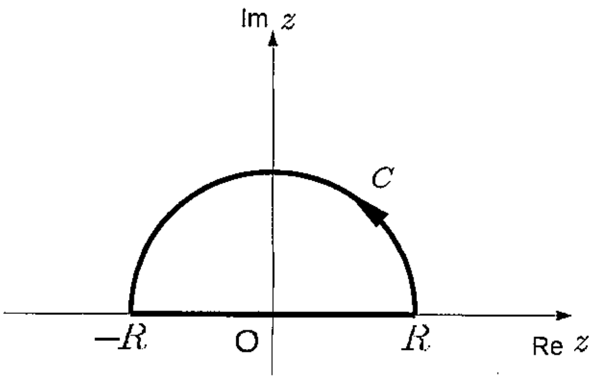
で与えられる。

(i) σ_x の固有値、固有ベクトルを求めよ。

(ii) $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$ を定義する。$\mathrm{e}^{u\sigma_z/2}\sigma_+\mathrm{e}^{-u\sigma_z/2}$ を σ_+ と u で表せ。ここで、u は実数とする。

2. 複素平面上に積分経路 C を図のようにとり、積分 $I = \int_C \frac{1}{(1+z^2)^2}dz$ を求めることによって、次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$



3. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 4\mathrm{e}^{-3x}$$

4 基礎科目－量子力学

xy 平面内において、質量 m、電荷 $q > 0$ の荷電粒子が以下のハミルトニアンにしたがって運動しているものとする。

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left\{\left(\hat{p}_x + \frac{qB\hat{y}}{2}\right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{qB\hat{x}}{2}\right)^2\right\}$$

ここで、$\hat{x}$、$\hat{y}$ は座標演算子、$\hat{p}_x$、$\hat{p}_y$ は $\hat{x}$、$\hat{y}$ に共役な運動量演算子であり、交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar,$$
$$[\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$$

を満たす。$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの、B は正の定数である。また、演算子 $\hat{L}$ を以下の式で定義する。

$$\hat{L} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

(1) ハミルトニアン $\hat{H}$ を展開して B について1次の項が $-\frac{qB}{2m}\hat{L}$ となることを示せ。

(2) 演算子 $\hat{L}$ と $\hat{H}$ の交換子 $[\hat{L}, \hat{H}]$ を計算せよ。

(3) ハイゼンベルク描像において、速度演算子 $\hat{v}_x$ と $\hat{v}_y$ を、以下のように座標演算子の時間 t による微分で定義する。

$$\hat{v}_x = \frac{d\hat{x}}{dt},\ \hat{v}_y = \frac{d\hat{y}}{dt}$$

ハイゼンベルクの運動方程式を使って $\hat{v}_x$ と $\hat{v}_y$ の具体的な表式を求めよ。

(4) $\hat{v}_x$ および $\hat{v}_y$ に対する運動方程式を導け。

(5) 問(4)で導いた運動方程式は、z 軸方向に一様な磁場 B が掛かった空間内にある荷電粒子について古典電磁気学によって導かれるものと同じであることを説明せよ。

(6) 問(4)あるいは(5)で得られた運動方程式を解くと、円運動の解が得られるが、この円運動の周期を求めよ。

5 基礎科目－熱・統計力学

スピン 1/2 である体積 V、原子数 N の結晶が一様な磁場 H 中に置かれている系を考える。各格子点のスピンの固有状態は $\hat{\sigma} = \pm 1$ で指定されるとする。以下の設問に答えよ。

問 1 スピン間に相互作用がない場合、各スピンのエネルギー準位は Zeeman 効果により $-\mu_0 \mu \hat{\sigma} H$ に分裂し、磁気モーメント $\mu \hat{\sigma}$ をもつ ($\mu > 0$)。ここで μ_0 は真空の透磁率である。以下の設問に答えよ。

(1) 結晶が絶対温度 T に保たれているとき、カノニカル集団の考え方を用いて、磁化 M および帯磁率 χ を求めよ。磁化は単位体積当たりの磁気モーメントの統計平均値であるとし、帯磁率は

$$\chi = \left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{H=0}$$

で定義する。

(2) 内部エネルギー U を M、V、H の関数として求めよ。

(3) エントロピー S を求めよ。さらに、この系では断熱的に磁場を操作することで系の温度を下げられることを説明せよ。

問 2 スピン間に相互作用がある場合を考える。格子点 i のスピンを $\hat{\sigma}_i$ として、$\hat{\sigma}_i$ に関する相互作用のエネルギーを $-J \sum_{j=1}^{z} \hat{\sigma}_i \langle \hat{\sigma}_j \rangle$ で近似する ($J > 0$)。ここで z は最隣接スピンの個数であり、$\langle \ \rangle$ は統計平均値を表す。結晶が絶対温度 T に保たれているとして、カノニカル集団の考え方を用いて以下の設問に答えよ。$\langle \hat{\sigma}_i \rangle = \langle \hat{\sigma}_j \rangle = \langle \hat{\sigma} \rangle$ としてよい。

(1) $-J \sum_{j=1}^{z} \hat{\sigma}_i \langle \hat{\sigma}_j \rangle = -\mu_0 \mu \hat{\sigma}_i H_{\mathrm{MF}}$ とおいたとき、H_{MF} を M の関数として求めよ。

(2) この系のエネルギー準位は Zeeman 効果と相互作用により決定されることを用いて、磁化 M がみたす方程式を求めよ。

(3) $\mu_0 \mu (H + H_{\mathrm{MF}}) \ll k_{\mathrm{B}} T$ であるとして、帯磁率 χ を求めよ。

(4) $H = 0$ であるとき、温度 T が $T_{\mathrm{C}} = zJ/k_{\mathrm{B}}$ 以上では $M = 0$ であるが、T_{C} 未満では $M \neq 0$ となる磁化が生じることを説明せよ。

2020 年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
外国人留学生入試
数学基礎・情報基礎

試験日：　2020 年 2 月 4 日（火）

試験時間：　9 時 30 分　～　12 時 00 分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4 問すべてに解答し，解答には各問あたり 1 枚の解答用紙を使用すること。（裏面使用可）

数 学 基 礎

【問題１】

【1】　$x^{2/3}+y^{2/3}=1$　で表される曲線の第１象限の部分を考える。

(1)　この曲線上の点は $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$（ただし $0\le\theta\le\pi/2$）とおくことができることを示しなさい。

(2)　この曲線は下に凸であることを示し、曲線の概形を描きなさい。

(3)　n を２以上の整数とするとき、座標軸とこの曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい。ただし、

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$$

とおいたとき、

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

が成り立つことを使ってよい。

【2】

(1) $a>0$, $b>0$, $c>0$ のとき、xyz 座標空間上の点 $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ を通る平面の方程式を求めなさい。

(2)　上記の平面と平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ で囲まれた立体の体積を２重積分を利用して求めなさい。

【問題２】

【1】 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のように A を対角化する P を一つ求めよ．

(2) A^n を求めよ．

【2】 $M_1 = (1)$（1 行 1 列の行列）とする．以下の各問に答えよ．

(1) M_2 を 2 行 2 列の行列とし，$M_2 = \begin{pmatrix} M_1 & 3M_1 \\ 0 & 2M_1 \end{pmatrix}$

とする．M_2 を書き下し，$|M_2|$ を求めよ．

(2) M_3 を 4 行 4 列の行列とし，$M_3 = \begin{pmatrix} M_2 & 3M_2 \\ O_{2\times 2} & 2M_2 \end{pmatrix}$

とする．M_3 を書き下し，$|M_3|$ を求めよ．

(3) M_n を 2^{n-1} 行 2^{n-1} 列の行列とし，$M_n = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 3M_{n-1} \\ O_{2^{n-2}\times 2^{n-2}} & 2M_{n-1} \end{pmatrix}$

とする．漸化式等を用いて $|M_n|$ を求めよ．

情 報 基 礎

【問題１】

以下の C 言語で書かれた関数 sort は、char 型の文字の配列 a に入っている n 個の文字 a[0]〜a[n-1] を昇順に整列する C のプログラムである。C の char 型の値の間には、アルファベット順にしたがって 'a' < 'b' といった大小関係が定義されている。各行の行頭には行番号を付してある。

```
1  void sort () {
2    int i, j;
3
4    for (i = n-1; 0 < i; i--) {
5      j = select_max (i);
6      swap (i, j);
7    }
8  }
```

関数 sort は内部で関数 select_max と swap を使っている。このプログラムについて、以下の問いに答えよ。

(1) swap (i, j) は a[i] と a[j] の文字を入れ替える関数である。この関数の定義を（C 言語または類似のプログラミング言語で）書け。

(2) select_max (i) は a[0] から a[i] までの中から最大の文字を探し、その添字を返す関数である。select_max (i) の定義を（C 言語または類似のプログラミング言語で）書け。

(3) n が 6 で配列 a の初期状態が a[0] から順に

i :	0	1	2	3	4	5
a[i] :	s	e	a	r	c	h

であったとする。このとき sort (); という呼び出しを行ったとしよう。6 行目で swap (i, j); が実行されるたびに、その直後の配列 a の内容と、その時点での変数 i、j の値を全て書き下せ。

(4) (3) の設定で sort (); を実行した際、select_max は合計、何回、呼び出されるか。

(5) 一般に整列する文字数が n だったとき、このプログラムの計算量を n を使って表せ。

(6) このプログラムの停止性を理由とともに説明せよ。

(7) 6 行目の swap (i, j); を実行した直後の配列 a について成り立つ性質を述べ、それを使ってこのプログラムが正しいこと、すなわちこのプログラムは配列 a を昇順に並べることを示せ。

【問題２】

以下の自動販売機の論理回路を設計する。ただし，自動販売機に対し各硬貨は一枚まで投入可能とする.

- 100 円硬貨を入れボタンを押すと商品が出る
- 500 円硬貨を入れボタンを押すと商品とお釣りが出る
- 100 円硬貨と 500 円硬貨を両方入れてボタンを押した場合も商品とお釣りが出る
- 硬貨を入れずボタンのみを押した場合と、硬貨を入れてボタンを押さなかった場合はエラーメッセージが表示される

100 円硬貨を入力 A、500 円硬貨を入力 B、ボタンを押すことを入力 C とし、商品を出力 X、お釣りの有無を出力 Y、エラーメッセージの有無を出力 Z として、以下の問題に答えよ。

(1) 入力 A、B、C、出力 X、Y、Z の真理値表を書け。

(2) 1. の真理値表から直接導かれる X と Y と Z の論理式を書け。

(3) 2. の論理式を論理演算子数が最少となるように簡単化せよ。式変形の過程も示せ。

(4) 3. で簡単化した論理式を元に、論理演算子の記号を用いて、この自動販売機の論理回路図を示せ。