

数学科 「数学」

- 1 逆正接関数 ($\tan x$ の逆関数) $\text{Arctan } x$ の Taylor 展開をもとに, 以下のようにして $\frac{\pi}{4}$ の近似を与えよ. ただし, $\text{Arctan } 0 = 0$ とする.

- (1) $|x| < 1$ のとき

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

となることをもとに, $x = 0$ における $\text{Arctan } x$ の Taylor 展開を求めよ.

- (2) 上で求めた Taylor 展開の部分和に $x = 1$ を代入することで $\text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$ を近似することを考える. 近似の誤差を 0.1 や 0.01 以下にするためには第何項までの和を考える必要があるかを論じよ. また, 誤差を 0.1 以下とする場合にはどのような近似値が得られるかを実際に述べよ.

数学科 「数学」

2 (i) n 次行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

を計算し, x の整式の形で表せ.

(ii) 次の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられる \mathbb{R}^4 の線形変換 T の像と核それぞれについて, 一組の基底と次元を求めよ.

(iii) n 次正方行列 A, B, C について, A と B が正則ならば, ABC, BCA , および, CAB の固有多項式が一致することを示せ.

物理学科 「数学・物理学」

1

(1) 3次元の位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル \mathbf{B} を用いて、ベクトル \mathbf{A} を $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$ で定義する。このとき、 $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

(2) 積分

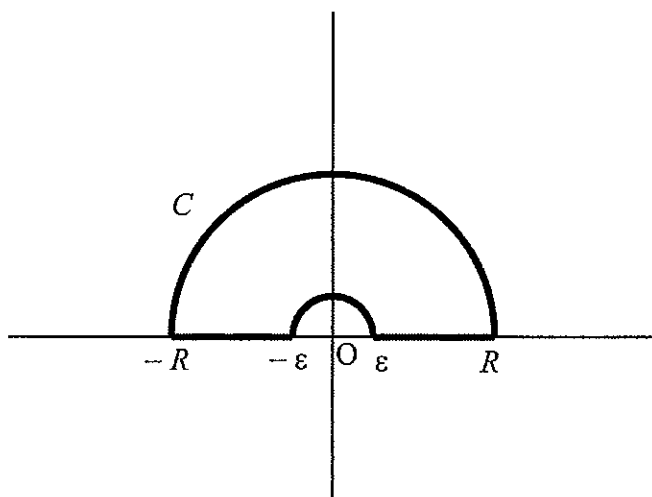
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

を計算することにより、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ。

(3)

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

を下図のような複素平面上の経路 C で計算することにより、 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ。



(4) 関数 $f(x)$ は区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で $f(x) = |x|$ の周期 2π の周期関数とする。 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。

(5) 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。 i は虚数単位である。

2

一端を天井に固定した長さ l の軽いひもに、質量 m の質点を取り付けた単振り子の運動を考える。このとき、質点は鉛直平面内のみで運動し、ひもは緩むことなく張られているものとする。重力加速度の大きさを g とし、次の問いに答えよ。

(1) 図1のように、ひもが固定されている支点の位置を原点 O とし、原点 O から鉛直下向き方向とひもとの間の角度を θ とする。 θ に関する質点の運動方程式を書き下せ。

(2) $|\theta| \ll 1$ とし、問(1)の運動方程式から時刻 t における θ を求めよ。ただし、初期時刻 $t=0$ において、 $\theta = \theta_0$ (実定数)、 $\frac{d\theta}{dt} = 0$ とする。

次に、天井に固定していた支点を質点の運動平面内で水平方向に周期的に動かす。図2のように、慣性系において支点の変位を X とする。以下では、 $|\theta| \ll 1$ とする。

(3) 支点の変位が $X = A \sin \omega t$ ($\omega^2 \neq g/l$) であるとき、 θ に関する質点の運動方程式を書き下せ。

(4) 問(3)の運動方程式から時刻 t における θ を求めよ。ただし、初期時刻 $t=0$ において、 $\theta = \theta_0$ (実定数)、 $\frac{d\theta}{dt} = 0$ とする。

(5) このとき、共鳴が生じるのはどのような場合か答えよ。また、共鳴が生じたときの時刻 t における θ を求めよ。

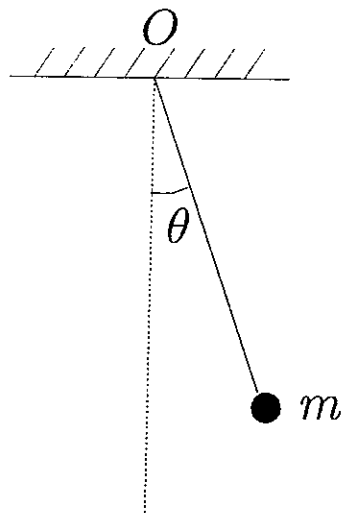


図1

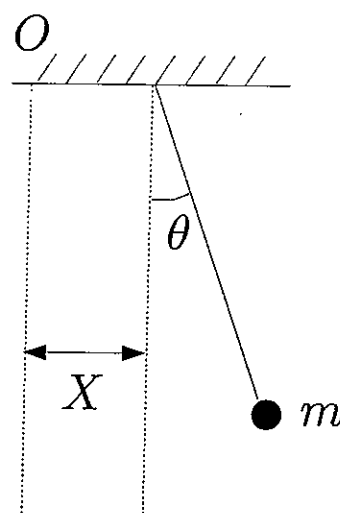
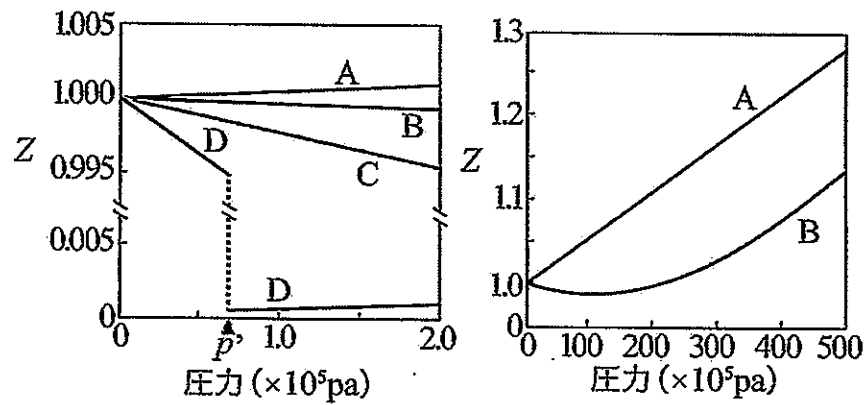


図2

化学科「化学」

1

[1] 圧縮因子 Z は理想気体の振る舞いからのずれを示す。下図の A~D は、 $O_2 \cdot O_3 \cdot H_2 \cdot H_2O$ のいずれかの圧縮因子 Z の振る舞いを示す。大気圧は 1013 hPa である。



- (i) A~D はそれぞれ何の物質を示しているか答えよ。考え方も記せ。
 - (ii) 物質 D について、圧力上昇時に圧力 p' で何が起きたか。
 - (iii) この図は 90°C 、 100°C 、 110°C いずれかの観測データである。何 $^\circ\text{C}$ のデータか答えよ。判断根拠も記せ。
- [2] 次式で表される一次元箱型ポテンシャル $V(x)$ 中を運動する質量 m の粒子を考える。

$$V(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$V(x) = +\infty \quad (x < 0 \text{ および } x > a)$$

- (i) この粒子のハミルトニアンを書け。プランク定数は h とする。
- (ii) この粒子の基底状態の波動関数を $\psi(x)$ とする。 $\psi(x)$ が満たす境界条件の式を記せ。
- (iii) $\psi(x)$ は、規格化定数を N として式①となる。

$$\psi(x) = N \sin \frac{\pi x}{a} \quad \text{①}$$

N を求めよ。計算過程も記せ。

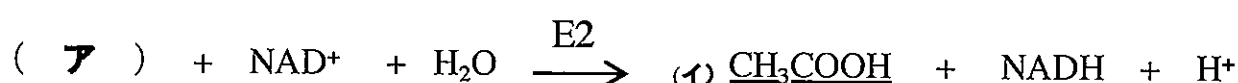
- (iv) 波動関数が式①の粒子の、座標 x および運動量の期待値 (平均値) を答えよ。

化学科 「化学」

2

以下の文章を読み、問 (i) ~ (v) に答えよ。

エタノール ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$) は生体内で、2種類の酵素 E1 と E2 で以下のように代謝される。この反応にはニコチンアミドアデニンジヌクレオチドの酸化型 (NAD^+) が必要である。ニコチンアミドアデニンジヌクレオチドには還元型 (NADH) と酸化型がある。



NAD^+ と NADH はともに紫外領域の波長の光を吸収する性質があり、260 nm と 340 nm における分子吸光係数 a ($\text{M}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) を以下に示す。

| | a ($\text{M}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) | |
|----------------|--|--------|
| | 260 nm | 340 nm |
| NAD^+ | 18,000 | 0 |
| NADH | 15,000 | 6,220 |

溶液に光が吸収される場合には、溶液を通過する前の光の強度 (I_0) に比べて、通過後の光の強度 (I) は減少する。減少する割合は、溶液中を光が通過する長さ l (cm)、溶液中の吸収物質の濃度 c (M)、分子吸光係数 a ($\text{M}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) に依存し、吸光度 ($\log(I_0/I)$) は以下の式で表される。

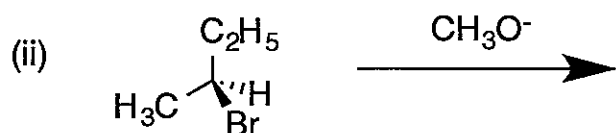
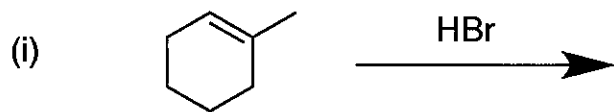
$$\log(I_0/I) = a c l$$

- (i) (ア) の化合物をルイス構造式で書き、名称を答えよ。
- (ii) NAD^+ と NADH は 260 nm の波長の光をともに吸収するが、その理由として考えられることを記述せよ。
- (iii) エタノールを含む溶液に、 NAD^+ と E1、E2 を加えて適切な条件で酵素反応を行なった。その後、溶液の吸光度 (光路長 1 cm) を測定したところ、340 nm で 0.125、260 nm で 1.8 であった。反応前の溶液に含まれていたエタノールと NAD^+ のモル濃度を有効数字二桁で計算し、考え方も示せ。ただし、反応後には溶液に含まれていたエタノールはすべて下線 (イ) の化合物に変化していたとする。
- (iv) 下線 (イ) の化合物のように分子中に $-\text{COOH}$ を持つ化合物は一般になんと呼ばれるか。
- (v) 下線 (イ) の化合物の沸点は 118 °C であり、これは同程度の分子量をもつアルコール ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$ 、沸点 97 °C) より高い。この理由として考えられることを記述せよ。図で示してもよい。

化学科 「化学」

3

[1] 次の反応における主生成物の構造式を記せ。また、反応機構も明記し、必要な場合はその立体構造を示すこと。



[2] 銅に関する(i)-(ii)の問いに答えよ。

(i) 銅は錆びると緑青色を示す。その主成分の組成は、 $\text{CH}_2\text{Cu}_2\text{O}_5$ で表わされる。これを加熱すると無色のガスを発生して CuO を生じる。この反応を化学反応式で示せ。

(ii) 硫酸銅の水溶液に過剰量のアンモニアを加えると深青色の溶液が得られる。溶液中に存在する錯イオンの立体構造を図示せよ。

[3] 酸素の単体は、主に二重結合でつながった二原子分子であるのに対し、同族の硫黄では単結合でつながったいくつもの同素体をとる (図1)。関連する以下の問いに答えよ。

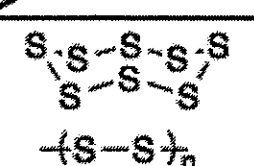
| | 単結合で つながった単体 | 二重結合で つながった単体 |
|----|---|---------------------|
| 酸素 | / | $\text{O}=\text{O}$ |
| 硫黄 |  | / |

図1：酸素や硫黄の同素体の例

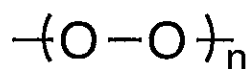


図2

(i) 図2に示すように、酸素原子が単結合でつながった単体を仮定する。この単体と、二重結合でつながった単体 (O_2) を比較した場合、共有電子対と非共有電子対のなす角度が大きいのはどちらになるか。酸素原子の周りのルイス構造を明示した上で理由とともに答えよ。

(ii) 酸素どうしの単結合と硫黄どうしの単結合を比較した場合、共有電子対と非共有電子対間の静電反発はどちらが大きいのと考えられるか。理由とともに答えよ。

(iii) 酸素が二重結合でつながった二原子分子となる理由について、(i)、(ii)をもとに考察せよ。

生物学科 「生物学」

1と2の答えは別の答案用紙それぞれ1枚のおもて面に記入すること。各答案には問の番号を表記すること。

1 問1～4に答えよ。

問1 動物のボディプランが放射相称に進化する場合、その背景となる生態的な要因を指摘せよ。

問2 「枝垂（しだれ）桜」の表現型をもたらす生理学的なしくみを述べよ。

問3 アサガオの花の色や模様の変異がメンデル遺伝に合致しないしくみを説明せよ。

問4 現在から約1億年前の中生代白亜紀中期に、被子植物と昆虫の種類数が短期間のうちに飛躍的に増加した。温暖化などの地球環境要因以外で、その理由と考えられるしくみを述べよ。

2 問1～3に答えよ。

問1 ある種の生物は、外界の環境がその生物にとって好ましくなくなったときに、無性生殖から有性生殖へ転換することができる。この能力がもつ進化的な重要性について説明せよ。

問2 細胞は、外界の高熱ストレスから自らを守る機構を備えている。その防御系に関わる生体分子と具体的役割について、タンパク質の構造変化に基づいて説明せよ。

問3 外界の温度が下がったときに、寒冷に順応する能力が高い生物も知られている。そのような生物では、どのような細胞レベルのしくみで低温に順応していると考えられるか、説明せよ。

平成31年度 お茶の水女子大学 理学部 第3年次編入学試験問題

情報科学科 「数学・情報」

【1】 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (ただし $p \neq 0, q \neq 0$) であるとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx$ (ただし $x \geq 0, b \geq 0$) の極値を求めよ.

(2) $p > 1$ のとき, 任意の $a \geq 0, b \geq 0$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成り立つことを証明せよ.

【2】 直角双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ のとき, $(\cosh t, \sinh t)$ が C 上にあることを示せ.

(2) C と $x = a$ (ただし $a > 1$) の2つの交点を P, Q とする. また, 原点を O とする. 直線 OP と直線 OQ および直角双曲線 C で囲まれた図形の面積を S としたとき, $\cosh S$ を求めよ.

【3】 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ に関して、次の問に答えよ.

- (1) 適当な直交行列 P を用いて、 A を対角化せよ.
- (2) A^n を求めよ.

【4】 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関して、次の問に答えよ.

- (1) A が正則行列となるための、 c の条件を求めよ.
- (2) 連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解を求めよ.

【5】 以下の間に解答せよ.

- (1) 1から1000までの自然数の総和を答えよ. また, 1から1000までの自然数のうち3の倍数の総和, 5の倍数の総和をそれぞれ答えよ.
- (2) 1から1000までの自然数のうち, 3の倍数または5の倍数になっているものの総和はいくつになるかを答えよ. また1から1000までの自然数のうち, 3の倍数でなく5の倍数でもないものの総和はいくつになるかを答えよ.
- (3) n, p, q, r は自然数とする. 1から n までの自然数のうち, p の倍数または q の倍数または r の倍数になっているものの総和を計算するためのプログラムを記述せよ. ただし n, p, q, r は予め定数として与えるものとし, p, q, r は互いに素であるとする. 解答に使用する言語は疑似コード, C#, C++, Fortran, Go, Haskell, Java, Lisp, OCaml, Python, Schemeなどなんでもよい.
- (4) 1から n までの自然数のうち, 素数であるものを取り出してその総和を求めるためのプログラムを作成することを考える. どのような手続きや関数が必要で, それらはどう設計するのか, 方針を述べよ. 実際にプログラムを作成する必要はない.

【6】 以下の符号部, 指数部, 仮数部で構成される浮動小数点表示があるとする.

符号部: 1ビットで構成される. 本問題では符号部は全て「正」とする.

指数部: 7ビットで構成される. 7ビット中の1ビット目は指数部の符号を表すものとする. また2ビット目以降は, 2を底とする指数を, 2進数で表す. ただし本問題では, 指数部の符号は全て「正」であるとする. つまり, 指数部の1ビット目は全て0であるとする.

仮数部: 24ビットで構成される. 小数点以下の値を2進数で表す. つまり, 最上位ビットが小数第一位であるとする.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 10進数で17.75と表現される実数に, 浮動小数点表示を適用したときの, 指数部と仮数部を, 2進数で表現せよ.
- (2) 指数部が「0000101」で, 仮数部が「101000100000000000000000」である浮動小数点表示を, 10進数で表現せよ.
- (3) この形式の浮動小数点表示で表すことができる最大値を10進数で表現すると, 10の何乗に近い値になるか解答せよ. また, その理由を指数部または仮数部のビット数にもとづいて説明せよ.