

数学科 「数学」

1 以下の問い合わせに答えよ。

(1) (i) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 1}}$ は収束していることを示せ。

(ii) 0 より大きい実数 x に対し, $f(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 1}}$ とおく。
 $0 < x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことを示せ。

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと, その微分に関して
 $g'(x)^2 = g(x)^3 + 1$ が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x) > 0$ をみたす連続関数とし,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \text{ もみたすと仮定する。}$$

(i) $a > 0$ に対し, X_a は $h(x) \geq a$ をみたす実数 x の集合とする。
このとき、 X_a は有界集合であることを示せ。

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ。
(閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい。)

数学科 「数学」

2 以下の問い合わせに答えよ。ただし、行列はすべて複素行列とする。

(1) X をベクトル空間、 U, V, W を X の部分ベクトル空間とする。 W が U, V の和集合 $U \cup V$ に含まれるとき、 W は U に含まれるか、 V に含まれるかのどちらかであることを示せ。

(2) A を 3 次正方行列で、 $A^3 = O$, $A^2 \neq O$ となるものとする。ただし、 O は零行列とする。 A の階数を求めよ。

(3) 次の行列 A を考える。ただし、 a は複素数とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & a-2 \\ 2a & 2 & 2-2a \\ -a & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

- (i) $a = 0$ のとき、 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ。
(ii) $a \neq 0$ のとき、 A は対角化可能でないことを示せ。

令和4年度 お茶の水女子大学 理学部 第3年次編入学試験問題

物理学科 「数学・物理学」

解答は問題ごとに別の答案用紙に書くこと。また、答案用紙には結果の式や数値のみでなく、導出方法も記述せよ。たとえ時間内に結果が完全には得られない場合でも、考え方の筋道や方針を記述せよ。

[1]

(1) 実変数 x, y の関数 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^4 + y^4) - xy$ の最小値と最小値を与える点 (x_0, y_0) を求めよ。

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$ を計算せよ。

(3) 実3次元空間の任意の点を (x, y, z) と表すとき、ベクトル $\vec{V} = (yz, zx, xy)$ の発散 ($\text{div } \vec{V}$) と回転 ($\text{rot } \vec{V}$)、及び $|\vec{V}|$ の勾配 ($\text{grad } |\vec{V}|$) を求めよ。

(4) 任意の行列 A に対してそのエルミート共役を A^\dagger と表す。

(a) 行列の積 $A^\dagger A$ が負の固有値を持たないことを示せ。

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、行列 $A^\dagger A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(c) (b) の行列 A に対して行列 $(A^\dagger A)^n$ と $e^{A^\dagger A}$ を求めよ。ただし、 n は正の整数である。

(5) 区間 $-a \leq x \leq a$ で定義された微分方程式 $d^2 f(x)/dx^2 + k^2 f(x) = 0$ ($k > 0$) を考える。ただし、 $a > 0$ である。

(a) 微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ。

(b) 解 $f(x)$ が境界条件 $f(-a) = f(a) = 0$ を満足するとき、 k の最小値を求めよ。

[2] なめらかで水平な平板に十分に小さな穴をあけ、両端に質量 m の質点 1,2 をそれぞれとりつけた軽いひもを通した。ひもの一端の質点 1 は平板上に静かに置き、もう一端の質点 2 は小さな穴から鉛直に吊り下げた。ひもの長さは L とし、十分に長く、つねに緩むことなく張られており、平板や小さな穴との間の摩擦は無視できるものとする。

図のように、平板上の質点 1 に、ひもに垂直な方向へ速度 v_0 を与えたところ、小さな穴を中心とし平板から離れることなく運動した。質点 1 が運動を始める前の位置は $r = r_0$ であったとする。

重力加速度の大きさを g とし、次の問い合わせに答えよ。

(1) 平板の小さな穴を原点として、平板上の質点 1 までの距離を r 、運動前のひもからの角度を θ として平板上に極座標表示をとる。また、原点から鉛直下向きに z 軸をとる。

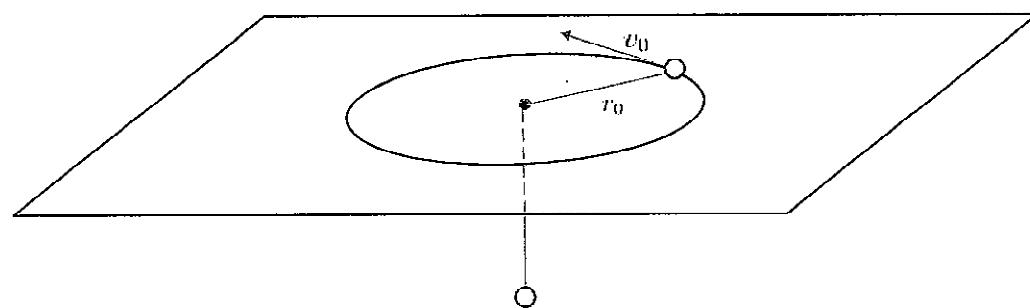
極座標表示によって、平板上の質点 1 の加速度が次のように与えられることを示せ。

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

(2) ひもの張力を T として、平板上の質点 1、および吊り下げられた質点 2 の運動方程式をそれぞれ書き下せ。

(3) 運動方程式より、 $r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_0 v_0$ であることを示せ。

(4) 平板上の質点 1 が $r = r_0$ の外側で運動をするときの r の範囲を求めよ。



[3]

次の問いに答えよ。

(1) 抵抗 R 、インダクタンス L 、キャパシター C を直列につないで交流電圧 V_{ac} をかけた回路を考える。なお、交流電圧の角周波数を ω とする。

(1-a) 回路の複素インピーダンスを求めよ。

(1-b) 実効電流が極大を示す角周波数（共振角周波数）を求めよ。

(1-c) 電圧と電流の間の位相のずれ ϕ を求めよ。

(2) スイッチを持つ回路にキャパシター C 、抵抗 R および直流電源 V_{dc} を直列につなぎ、時間 $t=0$ にスイッチを入れた。キャパシターにたまる電荷 Q の時間変化を求めよ。

(3) 磁化された地球を考える。但し地球上の磁場は、地球の中心に磁気双極子 p_m をもつモデルで近似できるとする。

(3-a) 原点(地球の中心)に z 方向を向いた磁気双極子 p_m があるとき、原点から距離 r の点 $R(r, \theta, \phi)$ での磁場 H を極座標系で表せ。なお、磁気双極子モーメント p_m がつくる点 R (磁気双極子からの位置ベクトル R) での磁位は

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}}{r^3}$$

と書ける。また、 r の値は非常に大きいとし、 μ_0 は透磁率を表す。

(3-b) 地球上の任意の点での伏角 α (地磁気の方向が水平面となす角度)と緯度 λ の間には

$$\tan \lambda = \frac{1}{2} \tan \alpha$$

の関係があることを示せ。

(3-c) 地球上のある地点で鉛直に立てた長さ l の導線に直流電流 I を流したところ、ほぼ西向きに F の力を受けた。この地点の緯度 λ を用いて F の大きさを示せ。なお、(3-a) で使用した物理量を用いてもよい。

化学科 「化学」

1

[1] 次の間に答えよ。

(i) 次の化合物の組み合わせにおいて、どちらがより共有結合性の高い化合物と考えられるか、理由とともに述べよ。

- (a) NaCl, NaBr
- (b) LiH, NaH

(ii) Na と Mg の第一イオン化エネルギーおよび第二イオン化エネルギーを比較するとそれぞれどちらが大きいか、理由とともに述べよ。

(iii) 次の分子とイオンの組み合わせにおいて、結合エネルギーを比較するとどちらが大きいと考えられるか、分子軌道のエネルギー準位の観点から理由とともに答えよ。また、結合エネルギーが大きいと考えられるものについて、その LUMO の概形を図示せよ。

- (a) H₂, H₂⁻
- (b) N₂, N₂⁺
- (c) O₂, O₂⁺

[2] 次の文章について下線部の事象が起こる理由を、文字式を用いて論述せよ。文字式には、以下の記号群の中から必要なものを含めること。図を用いても良い。

P: 圧力, V: 体積, T: 絶対温度, U: 内部エネルギー, q: 熱, w: 仕事,

G: ギブズエネルギー, H: エンタルピー, S: エントロピー

(i) 大気圧下での 10°C の水に対する N₂ の溶解度は、40°C の水に対するものよりも大きい。

(ii) 断熱壁に囲まれた円筒の内部を仕切りで区切り、片側のみに理想気体を封入してもう片側は真空とした。この仕切りを破ると、理想気体は円筒容器内部全体に広がった。

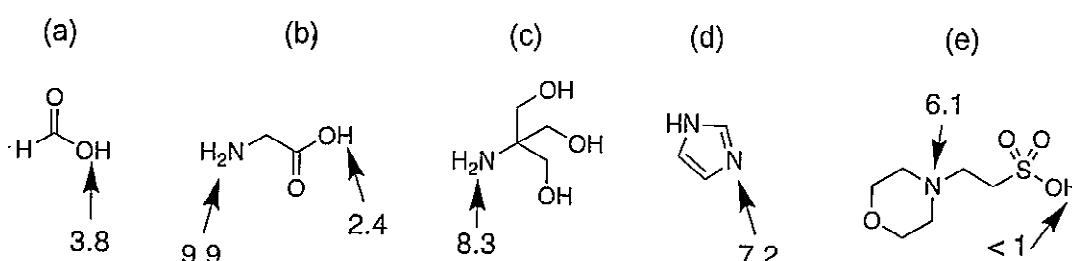
化学科 「化学」

2

弱酸と緩衝液に関する以下の間に答えよ。ただし、必要であれば下記の数値を用いて良い。

酢酸の酸解離定数 $K_a = 2.0 \times 10^{-5} \text{ mol/L}$, $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$, $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$,
 $\log_{10}(\sqrt{2}-1) = -0.383$, $\log_{10}(\sqrt{2}+1) = 0.383$, $\log_{10}(\sqrt{3}-1) = -0.135$, $\log_{10}(\sqrt{3}+1) = 0.436$

- (i) 酢酸水溶液の pH を考える。酢酸をモル濃度 C となるように水溶液とした場合、酢酸の解離した割合を α と定義すると、解離した酢酸の割合 α は C と K_a でどのようにあらわせるか答えよ。
- (ii) 酢酸の濃度 C が $1.0 \times 10^{-5} \text{ mol/L}$ の時の酢酸の解離度 α と pH を有効数字 2 術で求めよ。
- (iii) pK_a の定義を説明し、酢酸の pK_a を有効数字 2 術で求めよ。
- (iv) $2.0 \times 10^{-1} \text{ mol/L}$ 酢酸水溶液と $2.0 \times 10^{-1} \text{ mol/L}$ 酢酸ナトリウム水溶液を 1:1 の割合で混合した溶液の pH を有効数字 2 術で求めよ。
- (v) pH 10.2 の緩衝液を作成するためには、図 1 に示すどの試薬を用いるのが最も適していると考えられるか。図 1 の構造式やおよその pK_a を参考に、理由とともに答えよ。なお、強酸として塩酸、強塩基として水酸化ナトリウムを用いて良い。また、塩基の pK_a はその共役酸の値を記載している。

図 1: 緩衝液に使用可能な酸・塩基の構造と pK_a

化学科 「化学」

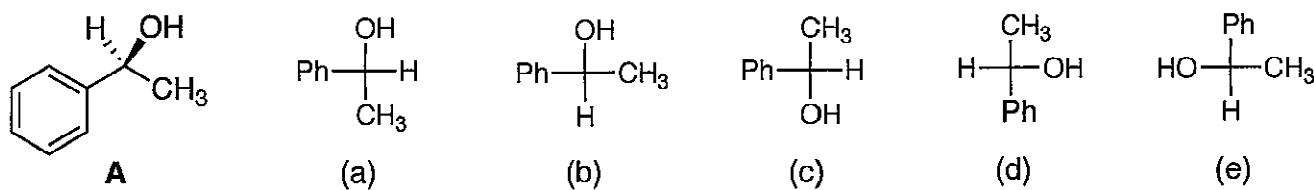
3

[1] *cis*-1,3-ジメチルシクロヘキサン(1)に関する以下の間に答えよ。

- (1)の異なるイス型配座を2つ記せ。また、アキシアル、エクアトリアル水素もすべて記せ。
- 問(i)の2つのイス型配座のうちどちらが安定か。その理由も記せ。

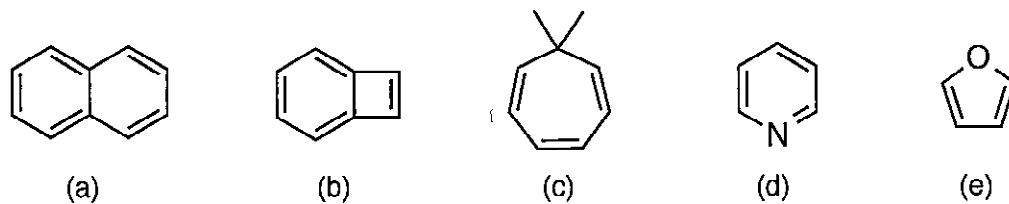
[2] 下記の化合物 A の絶対立体配置に関する以下の間に答えよ。

- A の絶対立体配置は R, S のどちらか。
- (a)~(e)は Fischer の投影式を示している。この中から A と同じものをすべて選べ。ただし Ph はベンゼン環を表わす。

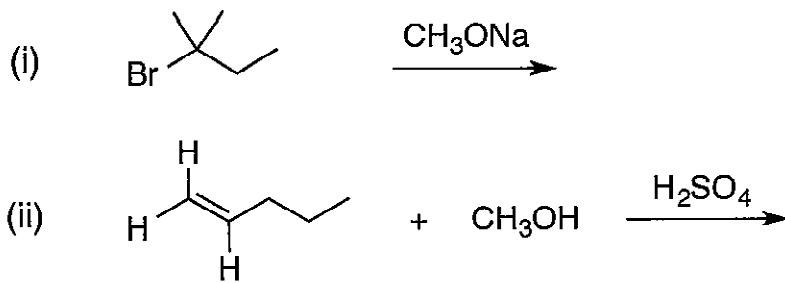


[3] 芳香族化合物に関する以下の間に答えよ。

- 芳香族性を示すために必要な条件を3つ記せ。
- 次の化合物(a)~(e)の中で芳香族性を示すものをすべて選べ。



[4] 次の反応で得られる生成物を記せ。また、それぞれの反応機構を詳しく説明せよ。



[5] 次の S_N1 反応および S_N2 反応に関する文章において、a~h に当てはまる語句を記せ。

- S_N1 反応および S_N2 反応は、a 反応に分類される。それらの反応機構を比較すると、S_N1 反応には b が1つ、c が2つある。一方、S_N2 反応には c が d つあるが b は無い。
- 塩化アルキルの S_N1 反応では、RCH₂-Cl, R₂CH-Cl, R₃C-Cl の順に反応性は e する。一方、S_N2 反応では、f する。
- (R)-2-クロロブタンとメトキシドイオンとの S_N2 反応では、不斉炭素の立体配置は g するが、メタノールとの S_N1 反応では h する。

生物学科 「生物学」

1 次の問1～5に答えよ。

問1 真核生物における遺伝情報の発現の過程を3つの段階に分け、細胞のどこで何がおこなわれるか説明せよ。

問2 核酸とポリペプチドの構造には方向性がある。それぞれ、方向性が生じるしくみを述べよ。
また、一方向性であることには、どのような利点があると考えられるか述べよ。

問3 DNA合成酵素とRNA合成酵素には様々な違いがある。それぞれがはたらく細胞周期の時期、合成のしくみ、性質の違いを述べよ。遺伝情報がRNAではなくDNAに保存される利点を説明せよ。

問4 ゲノムDNAからタンパク質をコードしない様々なRNAが転写されている。その一種であるマイクロRNAによる遺伝子発現の制御がどのようにおこなわれるか説明せよ。

問5 エピジェネティックな変化とは何か説明せよ。また、それが関与する現象を一つ挙げて詳しく説明せよ。

2 次の問 1~3 に答えよ。

問 1 シグナルペプチドを有するタンパク質の小胞体膜透過について説明せよ。

問 2 細胞内の主要なタンパク質分解システムとして、ユビキチン-プロテアソーム系による分解とオートファジーによる分解が存在している。両者のタンパク質分解の仕組みを説明せよ。

問 3 カルボキシペプチダーゼ Y (CPY) は、小胞体で合成され、ゴルジ体を経て、最終的に液胞に輸送される酵素である。酵母を ^{35}S で標識したメチオニンとシステインを含む培地で 5 分間培養し (パルスラベル), その後, ^{35}S で標識されてないメチオニンとシステインを含む培地で培養した (チェイス)。 ^{35}S で標識されているメチオニンとシステインは酵母の細胞内に取り込まれ、 ^{35}S で標識されてないメチオニンとシステインと同様にタンパク質合成に使用される。各時間で、酵母抽出液をもちいて CPY に対する抗体による免疫沈降をおこない、SDS-ポリアクリルアミド電気泳動 (SDS-PAGE) の後にオートラジオグラフィーで検出した (CPY のパルスチェイス実験)。下図は、その結果である。

この部分に記載されている文章については、
著作権法上の問題から掲載することが
できませんので、ご了承願います。

- (a) CPY に対する抗体による免疫沈降をおこなわず、タンパク質を濃縮した試料を用いて SDS-PAGE の後にオートラジオグラフィーで検出した場合、どのような結果となるか予想せよ。
- (b) パルスラベルを 10 分間に変更した場合、チェイス開始時 (0 分) のバンドパターンはどのような結果となるか予想せよ。
- (c) チェイス直後には、p1 型が多く存在するが、時間経過するにつれ p2 型に置き換わり、最終的には m 型 (成熟型) となる。それぞれの型でタンパク質の分子量が異なる理由を説明せよ。

令和4年度 お茶の水女子大学 理学部 第3年次編入学試験問題
情報科学科 「数学・情報」

【1】 次の各間に答えよ.

- (1) $f(x) = \sqrt{1+2x}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.
- (2) $f(x) = x^2 e^x$ の n 次導関数を求めよ. ただし n は自然数とする.
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}$ を求めよ.

【2】 $I_n = \int \tan^n x dx$ とするとき, 次の各間に答えよ.

- (1) $I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$ を示せ. ただし $n \geq 2$ とする.
- (2) I_4 を求めよ.

【3】 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の各間に答えよ.

- (1) 行列 A の行列式を求めよ.
- (2) 行列 A が正則行列か否かを判断し, 正則ならば A の逆行列を求めよ.

【4】 \mathbb{R}^3 の部分空間 $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \right\}$ と
 $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x \\ z \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ について以下の間に答えよ.

- (1) P と L の次元と基底を求めよ.
- (2) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $B \vec{x} \in P$, $B^2 = B$, $\forall \vec{l} \in L$ に対して $B \vec{l} = \vec{0}$ となるような B を求めよ.

【5】 入力が命題記号 P, Q, R で、出力が論理式

$$\neg(P \vee \neg Q) \leftrightarrow (R \vee P \rightarrow P \wedge \neg Q) \text{ ---} (\dagger)$$

で表される論理回路について、以下の問い合わせよ。

- (1) 論理式 (\dagger) の真偽値表 (truth table) を書け。
- (2) 論理式 (\dagger) の連言標準形 (CNF) を求めよ。ただし意味論的同値性に基づく論理式の同値変形を行う場合は、過程と根拠を明記すること。
- (3) この論理回路を AND, OR, NOT 回路のみを用いて設計せよ。
- (4) 命題論理の任意の論理式について、入力がその論理式に含まれる命題記号、出力がその論理式で表されるような論理回路を、AND, OR, NOT 回路のみを用いて設計することができる。その理由を述べよ。

【6】 IP アドレスとして 10.0.192.1/22 を使用しているドメインについて、以下の問い合わせよ。

- (1) このドメインのサブネットマスクはいくつであるか。
- (2) このドメインが使用できる IP アドレスの範囲はいくつからいくつまでか。ただし IP アドレスは全長が 4 バイトであり、また全てが 0 や 1 のホスト部は割り当てられないことに注意せよ。

【7】 以下は長さ n の数列を挿入ソート (insertion sort) によって昇順に整列する C 言語のプログラムである。配列中のデータ数は n であり、ソートを行う数列は、int 型の配列 $a[0] \sim a[n-1]$ に入っているものとする。ただし $a[n]$ にもアクセス可能であるとし、INT_MAX は int 型整数で表される最大値とする。

```
1  insertion_sort () { /* a[0]~a[n-1] をソートする */
2      int i, j, x;
3
4      a[n] = INT_MAX;
5      for (i = n - 2; i >= 0; i--) {
6          x = a[i];
7          for (j = i + 1; a[j] < x; j++)
8              a[j - 1] = a[j];
9          a[j - 1] = x;
10     }
11 }
```

このプログラムについて、以下の問い合わせよ。

- (1) どのようにソートが行われているか、このプログラムの動作を説明せよ。
- (2) ソートを行う数列が“75913”であるとする。すなわち、配列 a の初期状態は以下のようにになっている。

i :	0	1	2	3	4
$a[i]$:	7	5	9	1	3

このとき `insertion_sort()` を実行すると、ソートが終了するまで配列 a の内容がどのように変化していくか、配列中の要素が一つ変化する度に a の内容を書き表していくことにより示せ。

- (3) ソートを行う数列が“97531”であった場合に `insertion_sort()` 実行時の配列 a の内容がどのように変化していくか、配列中の要素が一つ変化する度に a の内容を書き表していくことにより示せ。

- (4) このプログラムの計算量を $O(\cdot)$ 記法で示せ。