お茶の水女子大学令和７年度一般入試（後期日程）理学部情報科学科論述試験（略解）

$\boxed{1}$

楕円の長軸、短軸をそれぞれ $4a, 2a$ とする（$a > 0$）。円の半径を r とする。円が小さい分には、ふたつの円を接するように並べて、それを楕円の内側に接するように置けば良いので、$r > 0$ であれば良い。

円が最も大きくなるのは、ふたつの円を左右に並べて、両者が接しながら、外側 4 か所で楕円と接するような場合である。楕円が原点を中心に横向きに置かれていたとすると、その方程式は

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

と表せる。また、ふたつ置かれる円の中心の座標を $(r, 0), (-r, 0)$ とすると、右側の円の方程式は

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

となる。これが楕円と接するためには、これと楕円が $(0 <)r < 1$ の範囲で 2 か所の共有点を持てば良い。y^2 を消去して整理すると

$$3x^2 - 8rx + 4a^2 = 0$$

この解が 2 つだと y の正負で 4 か所で共有点を持ってしまうので、重解になる必要がある。よって

$$(8r)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4a^2 = 0$$

これを解くと

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

よって $0 < r \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$。

$\boxed{2}$

(1) $b_n = \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$ を使うと

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{(3-\beta)(a_n - \beta) + 2(1-\beta) + \beta(3-\beta)}{(3-\alpha)(a_n - \alpha) + 2(1-\alpha) + \beta(3-\alpha)}$$

よって $2(1-\beta)+\beta(3-\beta) = 2(1-\alpha)+\beta(3-\alpha) = 0$ となればいい。$2(1-x)+x(3-x) = 0$ の解は $x = -1, 2$。よって $\alpha = 2, \beta = -1$ である。

(2) 上の式より $b_{n+1} = \dfrac{(3-\beta)(a_n - \beta)}{(3-\alpha)(a_n - \alpha)} = 4b_n$。$b_1 = \dfrac{a_1 + 1}{a_1 - 2} = -2$。よって b_n の一般項は $b_n = -2 \cdot 4^{n-1}$。したがって

$$a_n = \frac{\alpha b_n - \beta}{b_n - 1} = \frac{4^n - 1}{2 \cdot 4^{n-1} + 1}$$

(3) $c_{n+1} = \dfrac{9}{6 - c_n}$ を使うと

$$\frac{1}{d_{n+1}} = \frac{1}{c_{n+1} - \gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{6 - c_n}{c_n - (6 - 9/\gamma)}$$

分母に $c_n - \gamma$ という因子が現れる条件から $6 - 9/\gamma = \gamma$。これを解いて $\gamma = 3$。

(4) 上の式より

$$\frac{1}{d_{n+1}} = \frac{1}{3} \frac{6 - c_n}{c_n - 3} = \frac{1}{c_n - 3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{d_n} - \frac{1}{3}$$

$\dfrac{1}{d_1} = \dfrac{1}{c_1 - 3} = -\dfrac{1}{2}$。よって $\dfrac{1}{d_n}$ の一般項は $\dfrac{1}{d_n} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{n-1}{3} = -\dfrac{2n+1}{6}$。したがって

$$c_n = -\frac{6}{2n+1} + 3 = \frac{6n - 3}{2n + 1}$$

(5) $n \to \infty$ の極限をとると

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4^n}} \to 2, \quad c_n = \frac{6 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \to 3$$