お茶の水女子大学令和４年度一般入試（後期日程）
理学部情報科学科論述試験（略解）

$\boxed{1}$

(1) よく知られた多項式の積分を以下のような導出を通して定義から丁寧に導いている答案を高く評価した。

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{tk}{n}\right)\frac{t}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 3\left(\frac{tk}{n}\right)^2\frac{t}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3t^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3t^3}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= t^3
\end{aligned}
$$

(2) よく知られた微分と積分の関係を以下のような導出を通して定義から丁寧に導いている答案を高く評価した。

$$
G'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{G(t+\Delta t)-G(t)}{\Delta t}
$$

ここで $g(x)$ が単調増加なら $\lim$ の中身は以下を満たす。

$$
g(t) \le \frac{G(t+\Delta t)-G(t)}{\Delta t} \le g(t+\Delta t)
$$

三項すべてに対し $\Delta t \to 0$ の極限を取れば $G'(t) = g(t)$ となる。単調増加でなくても、微小区間中の最大値と最小値で挟めば同様に示せる。

$\boxed{2}$

(1) 本文中にある循環小数の定義を用いて計算が可能である。
$x = 0.1\dot{1}\dot{0}_{(2)}$ とすると，$100_{(2)}x = 11.0\dot{1}\dot{0}_{(2)}$ となり，$11_{(2)}x = 10.1_{(2)}$ より，

$$x = \frac{10.1_{(2)}}{11_{(2)}} = \frac{101_{(2)}}{110_{(2)}} = \frac{5}{6}_{(10)}$$

もしくは $0.8\dot{3}_{(10)}$ でもよい。

(2) 背理法を用いての証明がシンプルで思いつきやすいだろう。証明の例としては以下の通りである。
（証明）背理法で示す。$\sqrt{2}$ を 2 進数で循環小数で表現できたと仮定する。するとある整数 i, j を用いてその循環小数は 10 進数で $\frac{i}{2^j}$ の形で表現できることになる。これは有理数であり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。（証明終わり）
「任意の 2 以上の整数 i, j に対して，i 進数で有理数であれば j 進数でも有理数である。」を示し，その対偶を利用してもよい。

(3) (2) から、有限桁の小数であるということは有理数である、つまり分数表記が可能であるということに気付いてほしい。解答と証明は以下のものが考えられる。
（解答）$\frac{ap^i}{b}$ が整数となる整数 i が存在する。
（証明）$x = \frac{a}{b}$ が p 進数の有限桁の小数で表現されるということは，ある正の整数 q, i を用いて $x = \frac{q}{p^i}$ となることと同値である。よって $\frac{a}{b} = \frac{q}{p^i}$ と表記可能であることが有限桁の小数で表現できることの必要十分条件となる。（証明終わり）

(4) (1) と同様に定義通り計算すればよい。
$x_{(10)} = 0.\dot{1}23\dot{0}_{(\pi)}$ とおくと、$\pi^4 x_{(10)} = 1230.\dot{1}23\dot{0}_{(\pi)}$ から、

$$(\pi^4 - 1)x_{(10)} = 1230_{(\pi)} = \pi^3 + 2\pi^2 + 3\pi_{(10)}$$

となるので、求める 10 進数は

$$\frac{\pi^3 + 2\pi^2 + 3\pi}{\pi^4 - 1}.$$