令和４年度　お茶の水女子大学　理学部　情報科学科
後期日程　論述試験　試験問題

$\boxed{1}$

(1) 関数 $f(x) = 3x^2$ と x 軸と $x = t$ $(t > 0)$ に囲まれた面積

$$\int_0^t f(x)dx$$

を $F(t)$ とおく。このとき $F(t) = t^3$ となることを区分求積法に基づいて示せ。

(2) $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq t$ の範囲で常に $g(x) > 0$ であるような微分可能な関数とする。関数 $g(x)$ と x 軸と y 軸と $x = t$ に囲まれた面積を $G(t)$ とおく。このとき $G'(t) = g(t)$ となることを微分の定義に従って示せ。

2

我々が普段の生活で用いる数は10進数で表現される場合が多い。10進数とは，iを正の整数とし，i桁目の数が「10^{i-1}を何回加算するか」を表現する記法とも言える。例えば1129は10^3を１回，10^2を１回，10^1を２回，そして10^0を９回加算した数となる。

10進数の小数も同様の表現と見ることができ，小数点以下第i桁目は「10^{-i}を何回加算するか」を表現しているとも言える。例えば3.14は10^0を３回，10^{-1}を１回，そして10^{-2}を４回加算した数となる。

任意の数が有限桁の小数で表現できるわけではない事も知られている。例えば$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$となり，有限桁の小数では表現できない。そのような数のうち，小数で表現した場合に循環した数の列（循環節と呼ぶ）が現れるものは循環小数で表現でき，その循環節の先頭と末尾のそれぞれの上に点を付けて表現する方法がある。例えば$\frac{1}{7} = 0.1428571428571\cdots$となり，$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$となる。

ここまでは10進数の話であるが，数はpを２以上の整数としてp進数でも同様に表現できる。例えば10進数での65535は８進数では177777，２進数では1111111111111111となる。それぞれを区別して表記するために，各数の表記の右下に「それが何進数であるか」を明記しよう。それを利用することで

$$65535_{(10)} = 177777_{(8)} = 1111111111111111_{(2)}$$

のような記述ができる。小数も同様に

$$0.140625_{(10)} = 0.11_{(8)} = 0.001001_{(2)}$$

といった記述ができる。

以上を踏まえ，以下の各問に答えよ。

(1) $0.1\dot{1}\dot{0}_{(2)}$を10進数で表せ。

(2) $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots_{(10)}$は10進数の循環小数では表現できないことが知られている。$\sqrt{2}$を２進数で表現した場合も循環小数では表現できないことを証明せよ。

(3) a, b, pを正の整数とする。$\frac{a}{b}$がp進数での有限桁の小数となるための必要十分条件を求めよ。

(4) 円周率をπとし，π進数を同様に定義する。例えば$21_{(\pi)} = 2\pi + 1_{(10)}$である。このとき，$0.\dot{1}23\dot{0}_{(\pi)}$を10進数で表現せよ。