

数学共通

(理学部用)

注意事項

試験開始の合図があるまでは、この冊子を開いてはいけない。

1. この冊子の本文は3ページである。印刷の不鮮明な部分、ページの脱落などがあつた場合は申し出ること。
2. 答案用紙には、すべてに受験番号と氏名を記入すること。

記入例

受験 番号	1	2	3	4	5	氏名	大塚 茶織
----------	---	---	---	---	---	----	-------

3. 解答は、それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと。
4. この冊子の余白部分は下書きに使用してもよい。
5. この冊子及び下書き用紙は持ち帰ること。

1 三角形 ABC において辺 BC を 3 等分した点を B に近い方から順に M_1, M_2 とし, さらに $C = M_3$ とする. また, $k = 1, 2, 3$ に対して, 三角形 ABM_k の重心を G_k とおく. $\vec{p} = \vec{BA}$, $\vec{q} = \vec{BC}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) \vec{AM}_k, \vec{AG}_k を \vec{p}, \vec{q}, k を用いて表せ.

(2) 3 点 G_1, G_2, G_3 が同一直線上にあることを示せ.

(3) 次が成り立つことを示せ.

$$|\vec{G_1G_2} + \vec{G_2G_3}|^2 = 2(|\vec{G_1G_2}|^2 + |\vec{G_2G_3}|^2),$$

$$|\vec{AG_1} + \vec{AG_2} + \vec{AG_3}|^2 < 3(|\vec{AG_1}|^2 + |\vec{AG_2}|^2 + |\vec{AG_3}|^2)$$

2 各面に 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字の 1 つずつが重複なく描かれたサイコロが 3 つと、表に +, 裏に × の記号が区別できるように描かれたコインが 2 枚ある。これらすべてを投げることを 1 回の試行と呼ぶことにする。

1 回の試行で出た 3 つの数字と 2 つの記号を数字, 記号, 数字, 記号, 数字の順に並べて作ることができるすべての数式を構成し, それらを計算して得られる値の集合 S について考える。

たとえば, サイコロを 3 つ投げて出た数字が 2 と 3 と 5 で, コイン 2 枚を投げて + と × が 1 つずつ出たとき,

$$2 + 3 \times 5 = 17, 2 \times 3 + 5 = 11, 5 \times 2 + 3 = 13$$

などの数式が得られ, $S = \{11, 13, 17\}$ となる。以下の問いに答えよ。

- (1) サイコロを 3 つ投げたときに 2 が 2 つと 3 が 1 つ出る確率 p と, コインを 2 枚投げたときに + と × が 1 つずつ出る確率 q をそれぞれ求めよ。
- (2) 1 回の試行で得られる S に含まれる値がすべて偶数となる確率を求めよ。
- (3) 1 回の試行で得られる S に奇数が含まれる確率を求めよ。
- (4) 1 回の試行で得られた S に 27 が含まれていたとする。このとき, サイコロの出た数字に 3 が含まれていた確率を求めよ。

3 t を正の実数として、関数 $f(x) = e^{-x^2}$ について、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を l とおく。また、 l と x 軸との交点の x 座標を a とおき、 l と y 軸との交点の y 座標を b とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ の極値、変曲点、極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求めよ。また、 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) 実数 t が $t > 0$ の範囲を動いたときの b の最大値を求めよ。
- (3) 実数 t が $t > 0$ の範囲を動いたときの $b - a$ の最大値を求めよ。