令和３年度　入学試験問題（略解）

$\boxed{1}$　文教・生活１，数学共通（理）

(1) k を 3 で割った余りにより場合分けをする．k, k^2+2 がともに素数となるのは $k=3$ のときのみである．

(2) l を 5 で割った余りにより場合分けをする．証明問題のため詳細は省略．

(3) m を 5 で割った余りにより場合分けをする．とくに $m=5$ は素数であるが $m^2+4=629=17\times 37$ は素数でないことに注意する．証明問題のため詳細は省略．

$\boxed{2}$　文教・生活，数学共通（理）

(1) 円 C_1, C_2, C_3 の位置関係を考察し，これらの中心の座標や中心間の距離と円の半径の関係を考察する．証明問題のため詳細は省略．

(2) $r_1=r_2=4$ のとき最小値 8 をとる．

$\boxed{3}$　文教・生活

(1) $n=1$ のとき，条件式より $a_1=-1$ を得る．一般項は $a_n=1-2^n$.

(2) グラフの交点の x 座標は次の方程式の解である．

$$x^3+kx^2+kx=q$$

求める条件は，この式の左辺が極値を持たないこと同値であり，よって $0\leqq k\leqq 3$ である．

(3) $n=1$ のときは明らか．$n \geqq 2$ については，$n=2$ からはじめる帰納法を用いる．証明問題のため詳細は省略.

$\boxed{3}$ 数学共通（理）

(1) $x=t$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}x + \frac{2t^3}{(1+t^2)^2}$$

である．これが $(1, 1/2)$ を通るのは $t = 1, 1 \pm \sqrt{2}$ のとき．接線の方程式はそれぞれ

$$y = 1/2, \qquad y = \frac{1 \mp \sqrt{2}}{4}\,x + \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4}.$$

(2) $g(t) = f(t) - tf'(t) = 2t^3/(1+t^2)^2$ であり，この関数は $t = \sqrt{3}$ でのみ最大値 $3\sqrt{3}/8$ を取る．詳細は省略.

(3) 問題の接線 l の方程式は $y = -x/8 + 3\sqrt{3}/8$ である．求める面積は $\frac{15}{16} - \log 2$ である.

$\boxed{1}$ 数学 A，数学 B

(1) 接線の方程式は，$y = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{p_1}{p_2}x + \dfrac{b^2}{p_2}$.

法線の方程式は，$p_1 \neq 0$ のとき $y = \dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{p_2}{p_1}x + \left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)p_2$．また $p_1 = 0$ のとき，$x = 0$.

(2) 証明問題のため解答省略.

$\boxed{2}$ 数学 A，数学 B

(1) 証明問題のため解答省略.

(2) 証明問題のため解答省略.

(3) 証明問題のため解答省略.

$\boxed{3}$ 数学 A

(1) $x > 1$ を固定し，変数 $T = t - \frac{x}{t}$ を用いて積分を変数変換する．証明問題のため詳細は省略.

(2) $x > 1$ を固定し，変数 $T = \frac{x}{t}$ を用いて積分を変数変換する．証明問題のため詳細は省略.

(3) 上問 (1), (2) より $K(x) = I(x)$ である．よって $I(x) < 3\,e^{-2x}$ を示せばよい．証明問題のため詳細は省略.