物理 A

$\boxed{1}$

(1) 位置 $x$ は波源から $X-x$ だけ離れており、波の速さは $V$ であるから、求める変位は時刻 $t-\frac{X-x}{V}$ における波源の変位が伝わってきたものである.

$$\begin{aligned} y(x,t) &= cy_0(t-\frac{X-x}{V}) = A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{X-x}{V}\right)\right\} \\ &= cA\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{f}{V}x\right)-\frac{2\pi fX}{V}\right\}. \end{aligned}$$

(2) 時刻 $t$ のとき、この観測者は $x=vt$ にいるので問 (1) の結果を使うと求める変位は

$$\begin{aligned} y_1(t) &= cA\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{f}{V}vt\right)-\frac{2\pi fX}{V}\right\} \\ &= cA\sin\left\{2\pi\left(1+\frac{v}{V}\right)ft-\frac{2\pi fX}{V}\right\}. \end{aligned}$$

(3) $f_1=\left(1+\frac{v}{V}\right)f$.

(4) $X=vt_1+V(t-t_1)$ が成り立つので、$t_1=\frac{V}{V-v}t-\frac{X}{V-v}$.

(5) $y_2(t)$ は問 (4) で求めた時刻 $t_1$ に波源が引き起こす変位に等しいので求める変位は

$$\begin{aligned} y_2(t) &= cy_0(t_1) = cA\sin\left\{2\pi f\left(\frac{V}{V-v}t-\frac{X}{V}\right)\right\} \\ &= cA\sin\left\{2\pi\left(\frac{V}{V-v}\right)ft-\frac{2\pi fX}{V}\right\}. \end{aligned}$$

(6) $f_2=\frac{V}{V-v}f$.

(7) $\frac{V}{V-v}=1.05$ となるためには、$v=\frac{0.05}{1.05}\times 340[\mathrm{m/s}]=16.1\ [\mathrm{m/s}]$、つまり 58 [km/h].

物理Ⓐ

$\boxed{2}$

(1) $kx^2/2$

(2) 減らす向き

(3) 空気の誘電率 $\varepsilon_0$、極板の奥行き $w$、極板間距離 $d$ とすると、

$$C = \varepsilon_0 \frac{wl}{d}$$

であるので、並列接続された平行板コンデンサーの電気容量を計算することで、

$$\begin{aligned} C(x) &= (1+p)\,C\frac{x}{l} + C\frac{l-x}{l} \\ &= \left(1+\frac{px}{l}\right)C \end{aligned}$$

(4) 充電された電気量 $Q$ は変化しないので、静電エネルギー $U(x)$ は

$$U(x) = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2}{2C}\left(1+\frac{x}{l/p}\right)^{-1}$$

より、$E_0 = \frac{Q^2}{2C}$、$L = \frac{l}{p}$ である。

(5) 下図の通り

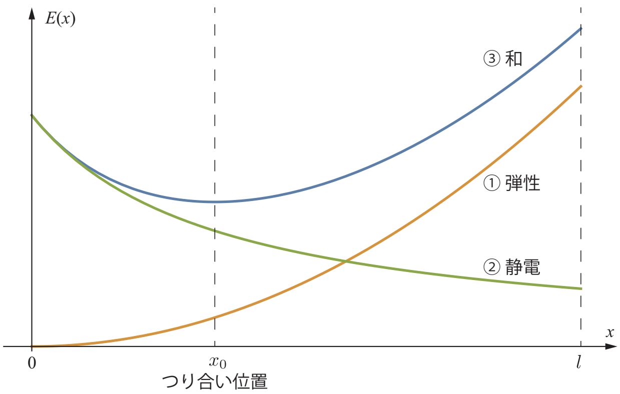


図 1　$x_0$ は和が極小値をとる位置。ばねの弾性力とコンデンサーの電場による電気力のつり合い位置である。

(6)【解答例】誘電体の位置エネルギーを、ばねの弾性エネルギーとコンデンサーの静電エネルギーの和とする。いまエネルギーは保存されているので、位置エネルギーの変化分だけ運動エネルギーに変換され、誘電体は位置エネルギーを減らす向きに運動する。図 1 のグラフ③より、

- 挿入位置が $x_0$ より左なら、右向きに動く
- 挿入位置が $x_0$ より右なら、左向きに動く
- 挿入位置が $x_0$ に一致しているならば動かない

(7)【解答例】図 1 のグラフ③より、誘電体右端が $x_0$ のまわりを往復するような振動運動を行う。このとき、$x_0$ の左右で位置エネルギーの変化（傾き）が異なるので、振動は厳密には単振動ではない。

(8)【解答例】挿入位置が $x_1$ のとき初めて外に出たということは、$x_1$ での位置エネルギーが $x=0$ での位置エネルギーと一致しているということである。よって、

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + E_0\left(1+\frac{x_1}{L}\right)^{-1} = E_0$$

物理 B

$\boxed{1}$

(1) 運動量保存則とエネルギー保存則から以下の式が成り立つ.

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$
$$\tfrac{1}{2} m_1 v^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

これを解くと

$$v_1 = \tfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$$
$$v_2 = \tfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v$$

. が得られる。したがって、$v_1 - v_2 = -v$ が成り立つ.

(2) 問 (1) で衝突後の円盤 A の速さが求まったので、円盤 A の衝突前後のエネルギーの差を求めると、$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2} v^2$.

(3) $m_1/m_2$ が 1 に比べて非常に小さいとき、$\Delta E = \frac{2m_1(m_1/m_2)}{(1+m_1/m_2)^2} v^2 \to 0$.

(4) $b = 2r \sin\alpha$.

(5) 衝突前後の円盤 A の速度を、衝突の瞬間の 2 つの円の接線に平行な成分と垂直な成分に分けて $v_\parallel, v_\perp$(衝突前)、$v_{1,\parallel}, v_{1,\perp}$ (衝突後)とする. 衝突によって円盤 A は接線に垂直な方向にのみ力を受けるので、$v_{1,\parallel} = v_\parallel$. 問 (1) の結果を使うと $v_{1,\perp} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} v_\perp$ であるから $E_1 = \frac{1}{2} m_1 \left( v_{1,\parallel}^2 + v_{1,\perp}^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 v^2 \left\{ \sin^2\alpha + \left( \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \right)^2 \cos^2\alpha \right\}$.

衝突時の角度 $\alpha$ が与えられれば、散乱角 $\theta$ は決まるので、上のように $E_1$ は $\theta$ を含まない形で書ける. 散乱角 $\theta$ を使うと、散乱後の円盤 A, B の速さをそれぞれ $v_1, v_2$ として、$x$, $y$ 方向の運動量保存の式を立てることができる.

$$\begin{aligned} m_1 v &= m_1 v_1 \cos\theta + m_2 v_2 \cos\alpha \\ 0 &= m_1 v_1 \sin\theta - m_2 v_2 \sin\alpha \end{aligned}$$

これら 2 式から $\alpha$ を含む項を消すと、$v_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$ が得られる. したがって、$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v^2 \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\theta)}$ となる. 散乱角 $\theta$ を含む解答も正解とした.

(6) 問 (5) の結果より、$E_1$ が最小になる条件は $m_2 = m_1$.

(7) 問 (6) の条件が満たされているとき、$v_{1,\perp} = 0$ なので円盤 A は衝突の瞬間における接線方向に進んでいく. $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ である.

物理 B

$\boxed{2}$

(1) 内部の気体がする仕事 $\Delta W$ は、力 $(PS)$ ×変位 $(\Delta L)$ より

$$\Delta W = PS\,\Delta L$$

となる。または、理想気体の状態方程式 $PV = RT$ に $V = SL$ を代入して

$$P = \frac{RT}{SL}$$

と圧力 $P$ を表すと、 次式のように表される。

$$\Delta W = \frac{RT}{L}\Delta L$$

(2) 熱力学第一法則より、内部エネルギーの変化 $\Delta U$ は断熱過程で

$$\Delta U = -\Delta W + 0$$

となり、気体になされる仕事 $-\Delta W$ に相当する。一方、内部エネルギーの変化は温度変化 $\Delta T$ と定積比熱を用いて次式でと表される。

$$\Delta U = C_v \Delta T$$

よって、温度変化 $\Delta T$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
\Delta T &= \Delta U / C_v \\
&= -\Delta W / C_v \\
&= -\frac{(RT/L)\Delta L}{3R/2} \\
&= -\frac{2T}{3L}\Delta L
\end{aligned}$$

温度変化が生じる理由：　熱力学第一法則より断熱変化（断熱膨張）で気体が外にする仕事の分だけ内部エネルギーが減少することと、理想気体の内部エネルギーが温度に依存するためである。

(3) 問 (2) で求めた式から、$\Delta L/L$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
\Delta L/L &= -3\Delta T/(2T) \\
&= -3(-10)/(2 \times 300) \\
&= 1/20
\end{aligned}$$

(4) このときシリンダー内部の気体の圧力は大気圧 $P_0$ に等しく、状態方程式 $P_0SL_0 = RT$ が成り立つ。よって $L_0$ は次のように求められる。

$$L_0 = \frac{RT}{P_0S}$$

(5) 内部の気体の圧力 $P$ はピストン外部の水圧と等しいため

$$P = P_0 + \rho g d$$

で与えられる。状態方程式 $PSL = RT$ に上の圧力の式を代入して、長さ $L$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned} L &= \frac{RT}{PS} \\ &= \frac{P_0}{P_0 + \rho g d} \cdot \frac{RT}{P_0S} \end{aligned}$$

そこで $\Delta L$ は以下のように導かれる。

$$\begin{aligned} \Delta L &= L - L_0 \\ &= \frac{P_0}{P_0 + \rho g d} \cdot \frac{RT}{P_0S} - \frac{RT}{P_0S} \\ &= -\frac{\rho g d}{P_0 + \rho g d} \cdot \frac{RT}{P_0S} \end{aligned}$$

よって $\Delta L/L_0$ は次式となる。

$$\frac{\Delta L}{L_0} = -\frac{\rho g d}{P_0 + \rho g d}$$

ここで $\rho g d/P_0 \ll 1$ より、次式のように近似できる。

$$\Delta L/L_0 \approx -\rho g d/P_0$$

大気圧に相当する深さ $D_0$ を $P_0 = \rho g D_0$ で定めると、次式で表される。

$$\Delta L/L_0 \approx -d/D_0$$

水深 10cm のとき、以下のように数値が求められる。

$$\begin{aligned} |\Delta L|/L_0 &= 0.1/10 \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

問 (4) と問 (5) において、ピストンには厚みがないので質量はゼロと考えられる。しかし、ピストンの質量を仮定した解答も、正解とした。

(6) $Q > 0$ である。
理由：
定温過程なので気体の内部エネルギーは変化しない。しかし、沈める過程で気体は仕事をされたため、熱力学第一法則より、系の外部に熱が出る。

気体になされる仕事は次のように計算される。

$$\begin{aligned} -P_0 S \Delta L &= P_0\, S L_0\, (-\Delta L / L_0) \\ &= RT\, |\Delta L| / L_0 \\ &= 8.3 \times 300 \times 0.01 \\ &\approx 24.9 [J] \end{aligned}$$

よって $Q = 2 \times 10^1$ J となる。