令 和 2 年 度 入 学 試 験 問 題

数　学（後期）

注 意 事 項

試験開始の合図があるまでは，この冊子を開いてはいけない．

1. この冊子の本文は 2 ページである．印刷の不鮮明な部分，ページの脱落などがあった場合は申し出ること．
2. 答案用紙には，すべてに受験番号と氏名を記入すること．

記入例

受験番号	1	2	3	4	5	氏名	大塚　茶織

3. 解答は，それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと．
4. この冊子の余白部分は下書きに使用してもよい．
5. この冊子及び下書き用紙は持ち帰ること．

1 すべての自然数 n に対して $a_{n+p}=a_n$ を満たすような自然数 p があるとき，数列 $\{a_n\}$ は周期的であるといい，このような p のうち最小のものを $\{a_n\}$ の周期という．

実数 q に対し，次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+1}=\begin{cases} q & (a_n=0\ のとき) \\ q-\dfrac{1}{a_n} & (a_n\neq 0\ のとき) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $q=\sqrt{3}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は周期的であることを示し，その周期を求めよ．

(2) $x^2-qx+1=0$ が 2 つの実数解をもつとし，それらの解を α，$\beta\,(0<|\alpha|<|\beta|)$ とする．$\{a_n\}$ が周期 1 の数列ではなく，すべての n に対して $a_n\neq 0$ であるとする．このとき，すべての n に対し，$a_n\neq\alpha$ であることを示し，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

と定めれば数列 $\{b_n\}$ は等比数列となることを示せ．

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ．

(4) $q=2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ．

2 n を 2 より大きい自然数とする．座標平面において，原点を中心とし半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ がある．ただし A_1 の座標は $(1,\ 0)$ とし，A_1，A_2，…，A_n はこの順に反時計回りに並んでいるものとする．すなわち，m を 1 以上 n 以下の整数とするとき，A_m の座標は

$$\left(\cos\frac{2(m-1)\pi}{n},\quad \sin\frac{2(m-1)\pi}{n}\right)$$

である．袋に 1 から n までの番号をつけた n 個の球が入っている．この袋から 1 つの球を取り出して，取り出した球の番号が k のとき，原点と A_k を通る直線を対称軸として正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ を裏返した後，取り出した球を袋に戻す操作を考える．

(1) この操作を 1 回行い，取り出した球の番号が k であるとき，頂点 A_m が移った先の座標を求めよ．

(2) この操作を 2 回行い，取り出した球の番号が 1 回目は k で，2 回目が ℓ であるとき，頂点 A_m が移った先の座標を求めよ．

(3) j を自然数とする．j 回の操作で A_1，A_2，…，A_n が同時に元の位置に戻る確率を求めよ．

(4) j を自然数とする．j 回の操作で初めて A_1，A_2，…，A_n が同時に元の位置に戻る確率を求めよ．