平 成 31 年 度 入 学 試 験 問 題

数　学（後期）

注 意 事 項

試験開始の合図があるまでは，この冊子を開いてはいけない.

1. この冊子の本文は 3 ページである．印刷の不鮮明な部分，ページの脱落などがあった場合は申し出ること.
2. 答案用紙には，すべてに受験番号と氏名を記入すること.

記入例

受験番号	1	2	3	4	5	氏名	大塚　茶織

3. 解答は，それぞれ問題の番号に対応する答案用紙に書くこと.
4. この冊子の余白部分は下書きに使用してもよい.
5. この冊子及び下書き用紙は持ち帰ること.

1 実数 k に対して方程式 $xy = k$ の表す座標平面上の図形を C_k とする．実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ について，$y = f(x)$ のグラフ C が，どの実数 k に対しても C_k とちょうど1つの共有点をもつとき，関数 $f(x)$ は条件(A)を満たすということにする．

(1) C_0，C_1，C_{-1} を座標平面上に図示せよ．

(2) 条件(A)を満たす関数 $f(x)$ について，$x \neq 0$ のとき $f(x) \neq 0$ となることを示せ．

(3) 条件(A)を満たす関数 $f(x)$ について，$x \neq 0$ のとき $f(x)$ の符号は x によらず一定であることを示せ．

(4) a，b を実数とする．2次関数 $g(x) = x^2 + ax + b$ が条件(A)を満たすための a，b の条件を求めよ．

(5) 条件(A)を満たす関数 $h(x)$ で次の条件(i)，(ii)をともに満たすものの具体例を1つ挙げよ．

(i) $0 < |s| < |t|$ であるとき，$0 < h(t) \leqq h(s)$ が成り立つ．

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$．

2 $\triangle$ABC の辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ $\sqrt{3}$，1，2とする．

(1) 辺 BC 上に B，C とは異なる点 P をとり，辺 AB 上に A，B とは異なる点 R をとる．BP の長さを t，$\angle$BPR の大きさを θ とするとき，PR の長さ l を t，θ を用いた式で表せ．

(2) 辺 BC 上に B，C とは異なる点 P をとり固定する．このとき，$\triangle$PQR が正三角形となるような辺 CA 上の点 Q，辺 AB 上の点 R が存在することを示せ．

(3) (2)の正三角形 PQR について，その1辺の長さを l とする．l^2 を BP の長さ t を用いた式で表せ．

(4) $\triangle$ABC の各辺に頂点をもつ正三角形の1辺の長さの最小値を求めよ．

3 0 以上の整数 m, n に対して実数 $X_{m,\,n}$ が，$X_{0,\,0} = 0$ と条件式

$$X_{m,\,n} = \frac{X_{m-1,\,n} + X_{m,\,n-1}}{2} + 1 \quad (m,\ n > 0),$$

$$X_{m,\,0} = \frac{X_{m-1,\,0} + 1}{2} \quad (m > 0),$$

$$X_{0,\,n} = \frac{X_{0,\,n-1} + 1}{2} \quad (n > 0)$$

により定められているものとする．

(1) 正の整数 m に対して $X_{m,\,0}$ を求めよ．

(2) 0 以上の整数 m, n に対して

$$X_{m,\,n} = X_{n,\,m}$$

が成立することを，$m + n = N$ とおいて N に関する数学的帰納法で示せ．

(3) $m + 1 \leqq n$ である 0 以上の整数 m, n に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$X_{m+1,\,n} \geqq X_{m,\,n+1}$$

(4) $m + 1 \leqq n$ である 0 以上の整数 m, n に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$X_{m+1,\,n} \leqq X_{m,\,n+1} + 2$$