2024年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学　専攻・　数学　コース

一般入試・外国人留学生入試
一 般・基 礎 教 育 科 目 試 験

試　験　日　：　2023 年 8 月 22 日(火)
試 験 時 間　：　9時30分 ～ 11時30分

【注意事項】

1. 監督者の「始め」の合図があるまで問題冊子を開けないこと.

2. この冊子は持ち帰ること. 下書き用紙が不足するときや答案用紙を破損したときなど, 用のある場合は挙手で監督者を呼ぶこと.

3. 問題1から問題2まですべての問題に対して, それぞれ別の答案用紙に解答すること. 答案用紙は裏面を使ってもかまわないが, そのむねを表面に明記すること.

問題 1

(1) a を実数とする．a の値で場合分けして，次の級数の収束を調べよ．

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n \log n}$$

(2) 正の実数全体のなす区間 $(0, \infty)$ 上で定義された関数 f は $(0, \infty)$ のどの点でも微分可能とする．f の導関数 f' に関して極限値 $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ が存在するとき

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} f'(x)$$

を示せ．

(3) 座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 F を

$$F(x, y) = (|x| + |y|)\sqrt{x^2 + y^2}$$

で定める．$\mathbb{R}^2$ の各点において F の微分可能性を調べよ．

問題2

【1】$\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列 A がある自然数 k について $A^k = O$ を満たすとき, A は 0 以外の固有値を持たないことを示せ. ただし O はゼロ行列とする.

【2】A が $\mathbb{R}$ 上の $m \times n$ 行列, B が $\mathbb{R}$ 上の $n \times m$ 行列のとき, AB の 0 でない固有値は BA の固有値であることを示せ.

【3】$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) AB の階数（ランク）を求めよ.

(2) AB が定める線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \varphi(\boldsymbol{v}) = AB\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4)$ について, $\operatorname{Ker}\varphi$ と $\operatorname{Im}\varphi$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(3) AB の固有値と固有ベクトルを求めよ.

2024年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学　専攻・　物理科学　コース

８　月　入　試　問　題
基　礎　科　目　試　験

試　験　日　：　2023 年 8月 22日（火）

試 験 時 間　：　9時 30分 ～ 12時 30分

【注意事項】

1. 5問すべて解答すること。（各問100点）
2. 解答は各問あたり1枚の答案用紙に記入すること。（裏面使用可）
3. 答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。
4. 監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を開けないこと。
5. 試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目 ー 力学

質量 m の小球を水平面からある角度の方向へ投げ上げた。水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとり、小球を投げ上げた時刻を $t=0$、そのときの小球の位置を $(x,y)=(0,0)$、初速度を $\boldsymbol{v}_0=(v_{0x},v_{0y})$ とする。重力加速度定数を g とし、小球には速度 $\boldsymbol{v}$ に比例した抵抗力が働くとする。抵抗の単位質量あたりの比例係数を $\alpha\ (>0)$ とすると、この抵抗力の大きさは $m\alpha v$ となる。以下の問に答えよ。必要であれば、$a \ll 1$ のときの近似式 $e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \cdots$ を使ってもよい。

1. 比例係数 α が時間の逆数の次元を持つことを示せ。

2. 小球の、水平方向および垂直方向の運動方程式をたてよ。

3. 小球の運動方程式を解いて任意の時刻 t での小球の速度 $(v_x(t),\ v_y(t))$ および位置 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

4. 投げ上げられた小球が再び水平面に到達する時刻を $t=T$ とする。一方、抵抗がないときに小球が水平面に到達する時刻を $t=T_0$ とする。比例係数 α が小さいとき、T の T_0 に対する補正は α, v_{0y}, g の組み合わせからなる無次元量 $\frac{\alpha v_{0y}}{g}$ に比例することを説明せよ。

5. 比例係数 α が十分小さいとき、無次元量 αT を無次元の係数 $c_1,\ c_2$ を用いて次のように近似する：

$$\alpha T \approx c_1 \frac{\alpha v_{0y}}{g} + c_2 \left(\frac{\alpha v_{0y}}{g}\right)^2.$$

   時刻 $t=T$ で $y=0$ ということから係数 $c_1,\ c_2$ を求め、T を $\frac{\alpha v_{0y}}{g}$ の1次のオーダーまで求めよ。

6. 時刻 $t=0$ と $t=T$ での力学的エネルギーの変化を $\frac{\alpha v_{0y}}{g}$ の2次以上を無視する近似で求めよ。

2　基礎科目 ー 電磁気学

(1)　真空中に電荷分布 $\rho(\vec{x})$ が存在しており、その電荷分布が作るポテンシャルを $\phi(\vec{x})$ とする。このとき、この系の静電エネルギーが

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{x})\phi(\vec{x})\mathrm{d}^3\vec{x}$$

で与えられることを示せ。ただし、電荷が全て無限遠に存在するときの静電エネルギーをゼロとし、真空の誘電率を ϵ_0 とする。(ヒント：電荷分布を多数の微小な電荷の集まりで近似して、それらの電荷を無限遠から電荷分布 $\rho(\vec{x})$ の配置に移動するのに要するエネルギーを考えるとよい。)

(2)　原点を中心とする半径 a の球内に電荷 $Q(Q>0)$ が一様に分布しているとき、以下の問いに答えよ。

(i)　原点からの距離 r の位置での電場の強さ $E(r)$ を求めよ。

(ii)　原点からの距離 r の位置での静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求めよ。

(iii)　この系の静電エネルギーを求めよ。

(3)　国際単位系 (SI) の基本単位は、質量 [kg]、長さ [m]、時間 [s]、電流 [A]、温度 [K]、物質量 [mol] および光度 [cd] の 7 つである。その他の物理量はこれらの基本単位の組み合わせにより、$[\mathrm{kg}^a\mathrm{m}^b\mathrm{s}^c\mathrm{A}^d\mathrm{K}^e\mathrm{mol}^f\mathrm{cd}^g]$ のように、べき指数 a〜g を用いて表せる。 例えば、速度の単位は $[\mathrm{m}^1\mathrm{s}^{-1}]$ である。 以下の 6 つの物理量の単位を基本単位を使って表せ。

(i)　エネルギー [J]

(ii)　電荷 [C]

(iii)　電圧 [V]

(iv)　電気抵抗 [Ω]

(v)　電気容量 [F]

(vi)　磁束密度 [T]

3　基礎科目 ー 物理数学

以下の設問に答えよ。

(1) 積分 I を次式で定義する。このとき I^2 の値を二重積分の計算をすることで求めよ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}$$

(2) 複素変数 z の関数 e^z/z と e^z/z^4 の $z=0$ における留数をそれぞれ求めよ。また、虚数単位を i と表すとき、$\log(1+i)$ の実部と虚部を求めよ。

(3) ベクトル $\mathbf{f} = (x, y, z)$ の大きさを f とするときに ∇f を計算せよ。また、$\mathbf{g} = (xy, yz, z^3)$ とするときに $\nabla \cdot \mathbf{g}$ と $\nabla \times \mathbf{g}$ を計算せよ。

(4) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と規格直交化された固有ベクトルを求めよ。

(5) 次の積分を複素積分を利用して計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}$$

4　基礎科目 ー 量子力学

1次元調和振動子のハミルトニアンは次のように与えられる。

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

ここで、m は質量、ω は角振動数である。$\hat{x}$ は位置演算子、$\hat{p}$ は運動量演算子であり、正準交換関係 $[\hat{x},\ \hat{p}] = i\hbar$（$\hbar$ は換算プランク定数）を満たすものとする。以下の設問に答えよ。

(1) 次の演算子 $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$、$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$、および $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を導入する。(i) 交換関係 $[\hat{a},\ \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。(ii) ハミルトニアン $\hat{H}_0$ を $\hat{a}^\dagger,\ \hat{a}$ を用いて表せ。

(2) ハミルトニアン $\hat{H}_0$ の固有値を E_n とする。ここで、n は0以上の整数とし、固有値の小さいものから順に $E_0,\ E_1,\ E_2, \cdots$ とする。この固有値 E_n に対して、規格化された固有状態を $|n\rangle$ とすると、$\hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ であり、$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ である。

次の2つの状態 (i) $\hat{a}|n+1\rangle$、(ii) $(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ がいずれも $\hat{H}_0$ の固有状態であり、固有値が E_n であることを示せ。ここで、$|0\rangle$ は $a|0\rangle = 0$ を満たす基底状態である。

さらに、$|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle/\sqrt{n!}$ とすると $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$ である。この規格化された $|n\rangle$ の式を用いて、次の2つの関係式を確認せよ。

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \qquad \hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle$$

(3) 上記の調和振動子に摂動 $\lambda\hat{U}$ が加わったとき、ハミルトニアンは $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{U}$ と表される。このときの $\hat{H}$ の固有値を V_n、固有状態を $|\psi_n\rangle$ とすると $\hat{H}|\psi_n\rangle = V_n|\psi_n\rangle$ であり、λ がゼロではない有限な値をもつとき、V_n と $|\psi_n\rangle$ が λ のべき展開

$$V_n = E_n + \lambda V_n^{(1)} + \lambda^2 V_n^{(2)} + \cdots,$$
$$|\psi_n\rangle = |n\rangle + \lambda|\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2|\psi_n^{(2)}\rangle + \cdots$$

で与えられるとする。このとき、$V_n^{(1)} = \langle n|\hat{U}|n\rangle$、$V_n^{(2)} = \displaystyle\sum_{k\neq n}\frac{\langle n|\hat{U}|k\rangle\langle k|\hat{U}|n\rangle}{E_n - E_k}$ である。いま、加わった摂動が $\lambda\hat{x}$ であったとき、$V_n^{(1)}$、および $V_n^{(2)}$ を求めよ。

(4) ハミルトニアン $\hat{H}$ の固有値 V_n が、問 (3) で求めた2次までの近似結果と一致することを示せ。

5　基礎科目 一 熱・統計力学

以下の問いに答えよ。ただし、P、V、T はそれぞれ圧力、体積、絶対温度を示し、気体定数を R、ボルツマン定数を k_B とする。

(1) 理想気体が、断熱準静的に状態 (P_1, V_1, T_1) から状態 (P_2, V_2, T_2) へ変化するとき、気体が外部に対してなす仕事 W を求めよ。なお、定積比熱 C_V、定圧比熱 C_P は一定とし、$\gamma=C_P/C_V$ を用いてよい。

(2) ある気体 1 mol が van der Waals の状態方程式 $(P+a/V^2)(V-b)=RT$ に従うとき、この気体の臨界点における圧力 P_c、体積 V_c、温度 T_c をそれぞれ求め、RT_c/P_cV_c が a、b によらない一定値になることを示せ。ただし、a、b は物質による定数であり、臨界点では $(\frac{\partial P}{\partial V})_T=(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2})_T=0$ である。

(3) 体積 V の箱にボーズ統計に従う N 個の自由粒子が入っている。ボーズ凝縮している低温 (温度 T) での、この系のエネルギー E、定積比熱 C_V をそれぞれ求めよ。ただし、状態密度のエネルギー依存性を $D(\varepsilon)=A_0V\varepsilon^{1/2}$、$I_0=\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx$ とし、定数 A_0、I_0 を用いてよい。

2024年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学　専攻　・ 化学・生物化学 コース

一 般 入 試

学士・修士一貫トラック特別選抜

（専 門 科 目）

試　験　日 ：　2023年 8月 22日（火）

試 験 時 間 ：　9時 30分 ～ 12時 00分

【注意事項】

1. 監督者の「始め」の合図があるまで問題冊子を開かないこと。

2. 5つの分野の問題のうち、3つを選択し、解答せよ。(各問100点)

3. 有機化学、無機化学、生物化学、分析化学の問題については、それぞれ1枚の答案用紙に解答せよ。物理化学の問題については、2枚の答案用紙に((1)を1枚目、(2)を2枚目)に解答せよ。

4. 答案用紙の裏面を使用してよいが、太線より下に記述せよ。

5. 解答番号欄には問題の分野番号を記入する。物理化学の場合は、1-(1)　、1-(2)のように記入せよ。

6. 試験中、用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。

1　物理化学

（1）原子・分子の構造とエネルギーに関する問 1－4 に答えよ。解答に至る過程も示すこと。

問 1　水素型原子の束縛状態エネルギーE_nは、プランク定数 h、光速 c、原子番号 Z、定数 R、主量子数 n を用いて

$$E_n = -\frac{hcZ^2R}{n^2}$$

と表せる。

(i)　H 原子と He^+イオンの基底状態のエネルギーは、どちらが何倍低いか。

(ii)　1s 状態にある H 原子を 1 光子の吸収でイオン化させるのに必要な光の振動数 ν を、c と R を用いて表せ。

問 2　パウリの排他原理とフントの規則についてそれぞれ説明せよ。

問 3　H_2^+に対して、A、B をそれぞれ原子 A、原子 B の 1s 原子軌道関数、N を規格化定数とするとき、分子軌道関数は$\Psi_\pm = N(A \pm B)$と書ける。なお、$\int A^2\,d\tau = 1$、$\int B^2\,d\tau = 1$、$S = \int AB\,d\tau$である。

(i)　Ψ_+およびΨ_-の N を、重なり積分 S を用いてそれぞれ表せ。

(ii)　Ψ_+およびΨ_-を図示し、それぞれの結合性について説明せよ。

問 4　H 原子の 1s 軌道と F 原子の 2p 軌道は、それぞれ真空準位から 13.6 eV と 18.6 eV 低いところに位置する。

(i)　H 原子の 1s 軌道と F 原子の 2p 軌道（$2p_x$, $2p_y$, $2p_z$）からなる原子軌道と、フッ化水素分子 HF の分子軌道のエネルギー準位図を描け。ただし、結合軸は z 軸上にあるとする。

(ii)　(i)で示したエネルギー準位図に基づき、HF が極性分子である理由を説明せよ。

（2）統計熱力学についての以下の問 1−6 に答えよ。

問 1　以下の文章の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に適当な語句、式、または記号を答えよ。

平衡状態における系の状態分布は、正準分布：$\tilde{P}_i \propto$ $\boxed{\text{ア（式）}}$ に従う。ただし、エネルギー準位の縮退はないとする。このとき、$E_j > E_i$ ならば必ず p_j $\boxed{\text{イ（記号）}}$ p_i となり、高エネルギー準位の占有数は系の温度が高いほど $\boxed{\text{ウ（語句）}}$ するが、低エネルギー準位の占有数を越えることはない。

正準分布：$\tilde{P}_i \propto$ $\boxed{\text{ア（式）}}$ の規格化定数：$\tilde{Q} =$ $\boxed{\text{エ（式）}}$ は $\boxed{\text{オ（語句）}}$ と呼ばれ、すべての熱力学関数が $\tilde{Q}$ を用いて導けることから、$\tilde{Q}$ は熱力学における波動関数とも言われる。例えば、系の $\boxed{\text{カ（語句）}}$ (U) は、系の平均エネルギー：$\langle E \rangle =$ $\boxed{\text{キ（式）}}$ により表される。この式は、$\left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T}\right)_{V,\{n\}} =$ $\boxed{\text{ク（式）}}$ の関係を用いると、$\langle E \rangle =$ $\boxed{\text{ケ（式）}}$ とでき、U が $\tilde{Q}$ と T により表されることがわかる。この関係は、$U = k_B T^2 \left(\frac{\partial \ln \tilde{Q}}{\partial T}\right)_{V,\{n\}}$ とも表される。

また、系の Helmholtz エネルギー (A) は、$A = -k_B T \ln \tilde{Q}$ と表される。これより、系のエントロピー (S) は、やはり $\tilde{Q}$ と T により $S =$ $\boxed{\text{コ（式）}}$ と表される。

問 2　Na 原子の電子基底状態の電子配置は[Ne](3s)^1、第一電子励起状態では[Ne](3p)^1 である。それぞれのエネルギーを E_0、E_1 としたとき、電子励起状態の占有数が電子基底状態の占有数よりも大きくなる温度 T を正準分布を元に E_0、E_1、k_B を用いて表せ。

問 3　Na 原子の炎色反応は黄橙色であり、その発光波長はおよそ 589 nm (1.70×10^4 cm^{-1})である。問 2 の温度を求めよ。必要であれば、$\frac{k_B}{hc} = 0.695$ cm^{-1} K^{-1}、$\ln 3 = 1.10$ を用いよ。

問 4　室温において、Na 原子の第一電子励起状態の占有数が無視できることを示せ。

問 5　室温における Na 原子のエントロピーに対する電子状態からの寄与を見積もれ。

問 6　(i) 状態方程式の一般的な定義を述べよ。さらに、完全気体と実在気体の状態方程式について、違いを説明せよ。

(ii) $\Delta_f H^\ominus$、$\overline{S}^\ominus$、$\Delta_f G^\ominus$ は、それぞれ何を表すか。基準状態、標準状態に注意し説明せよ。

2　無機化学

（1） ホウ素原子の 2s 軌道の有効核電荷は 2.576 であるのに対し、2p 軌道ではこれよりわずかに小さい 2.421 となる。この理由を動径分布関数の観点から説明せよ。

（2） つぎの分子のルイス酸性あるいはルイス塩基性を比較し、大きい順に並べよ。さらに、その理由についても説明せよ。

（i） ハロゲン化スズ（SnF_4、$SnCl_4$,、$SnBr_4$、SnI_4）のルイス酸性

（ii） 三ハロゲン化ホウ素（BF_3、BCl_3）のルイス酸性

（iii） アンモニア、トリメチルアミン、トリフルオロアミンのルイス塩基性

（3） MX 型のイオン結晶の構造について次の問に答えよ。

（i） 塩化ナトリウム型の結晶構造を図示せよ。

（ii） イオン結晶の結晶構造は、陽イオン半径 r_M と陰イオン半径 r_X の比に依存する。r_M/r_X が十分に大きくなると、塩化ナトリウム型とは異なる結晶構造 A をとる。この結晶構造 A の型を答え、構造を図示せよ。

（iii） イオン結晶において陽イオンと陰イオンを剛体球で近似したとき、塩化ナトリウム型の結晶構造をとりうる r_M/r_X の最大値を求めよ。導出過程も記すこと。
（$\sqrt{2}$ = 1.414、$\sqrt{3}$ = 1.732 を用いてよい。）

（4） d 金属錯体の配位子場分裂は、配位子場理論では基本的に σ 結合をベースに考える。これは、有機物の場合とは異なり、d 金属錯体では π 結合が σ 結合に比べて弱くなるためである。

（i） なぜ π 結合が弱くなるのか、考えを述べよ。

（ii） 実際は配位子場理論でも、π 結合を配位子場の観点から考慮している。これはどのような考え方であるか、詳しく説明せよ。

（5） 13 族元素のイオン化エネルギーを表に示す。特に、第二および第三イオン化エネルギーで顕著に、周期表の下に行くほど、値の減少と増大を繰り返すようになる。（これを交番現象という。）このような現象が起こる理由について、詳しく説明せよ。

	B	Al	Ga	In	Tl
第一イオン化エネルギー	799	577	577	556	590
第二イオン化エネルギー	2427	1817	1979	1821	1971
第三イオン化エネルギー	3660	2745	2963	2704	2878

（単位：$kJ \cdot mol^{-1}$）

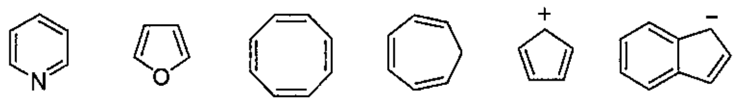
3　有機化学

（1）次の問 (i)〜(viii) について答え、(i)〜(v) については簡潔に理由も述べよ。

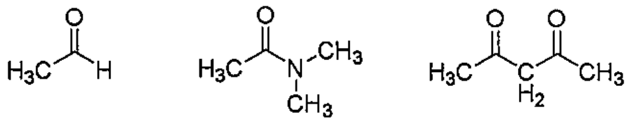
(i) 次の平衡式は右、左どちらに偏るか。ただし、HCN と H_3O^+ の pK_a はそれぞれ 9.1, −1.7 とする。

$$H_2O \quad + \quad HCN \quad \rightleftharpoons \quad H_3O^+ \quad + \quad CN^-$$

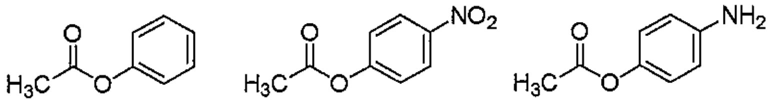
(ii) 次の分子あるいはイオンの中で、芳香族性を示すものをすべて選べ。



(iii) 以下の化合物を酸性度が高いものから低いものへ並べよ。

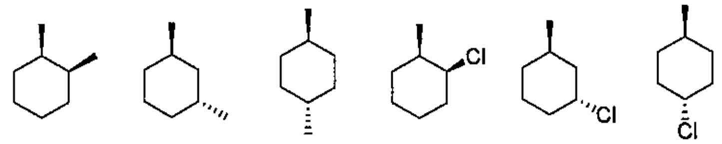


(iv) 以下のエステルをアルカリ加水分解の反応性が高いものから低いものへ並べよ。



(v) ヨードシクロヘキサンとブロモシクロヘキサンではE1反応が早く進行するのはどちらか。

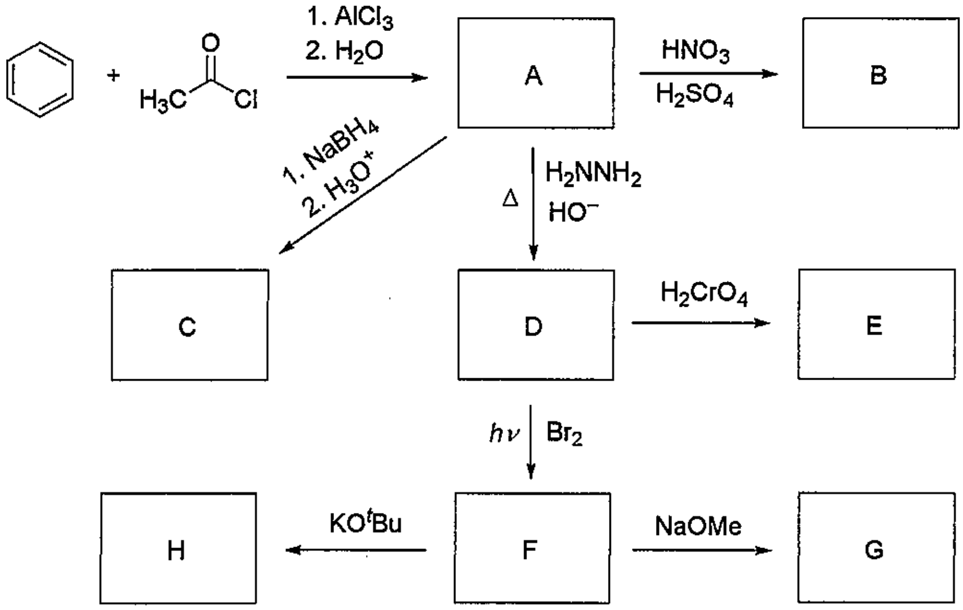
(vi) 次の化合物のうち、キラルなものを全て答えよ。



(vii) $[\alpha]^{25}_{D}$ = +4.25 のアラニン溶液がある。このアラニンのエナンチオマー過剰率はいくらか。ただし、純粋な(+)-アラニンの比旋光度は+8.5 とする。

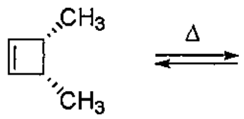
(viii) 3-メチル-1-ブテンと HBr の反応から得られる主生成物の構造式を書け。

（２）以下の反応においてＡからＨにあてはまる適切な化合物の構造式を書け。なお、立体化学については無視してよい。また、ＡからＢが生成する反応機構も書け。

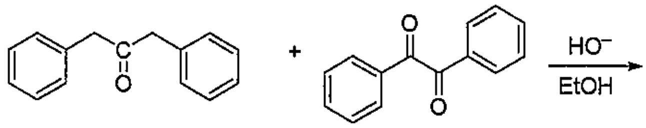


（３）以下の反応の主生成物の構造式を書け。(a) については分子軌道図から生成物の立体化学を説明するとともに、原料と主生成物の IUPAC 名を書け。また、(b), (c) については曲がった矢印を使い反応機構を説明せよ。

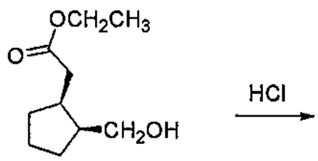
(a)



(b)



(c)



4 生物化学

（1）以下の文章が正しい場合は○を、誤りがある場合は×を書き、そう考えた理由を正誤どちらの場合も記述せよ。

① タンパク質を構成する 20 種類のアミノ酸は全てが L-アミノ酸で、RS 表記では全て S 体になる。

② ペプチド主鎖の原子は、-Cα-C-N-Cα-のように配置されており、隣接したアミノ酸残基のCαとCαの間には３つの結合がある。それらの中の C-N 結合は、CH_3NH_2 の C-N 結合より少し長い結合距離となる。

③ タンパク質のアミノ酸配列は、そのタンパク質をコードする遺伝子の塩基配列から調べることができるが、それはタンパク質そのものを分析して得られたアミノ酸配列とは異なる場合がある。

④ DNA の相補鎖同士が 50%解離する温度を Tm 値と言う。Tm 値は DNA の GC 含有量が多いほど高く、また DNA 溶液中のナトリウムイオン濃度が高いほど低くなる。

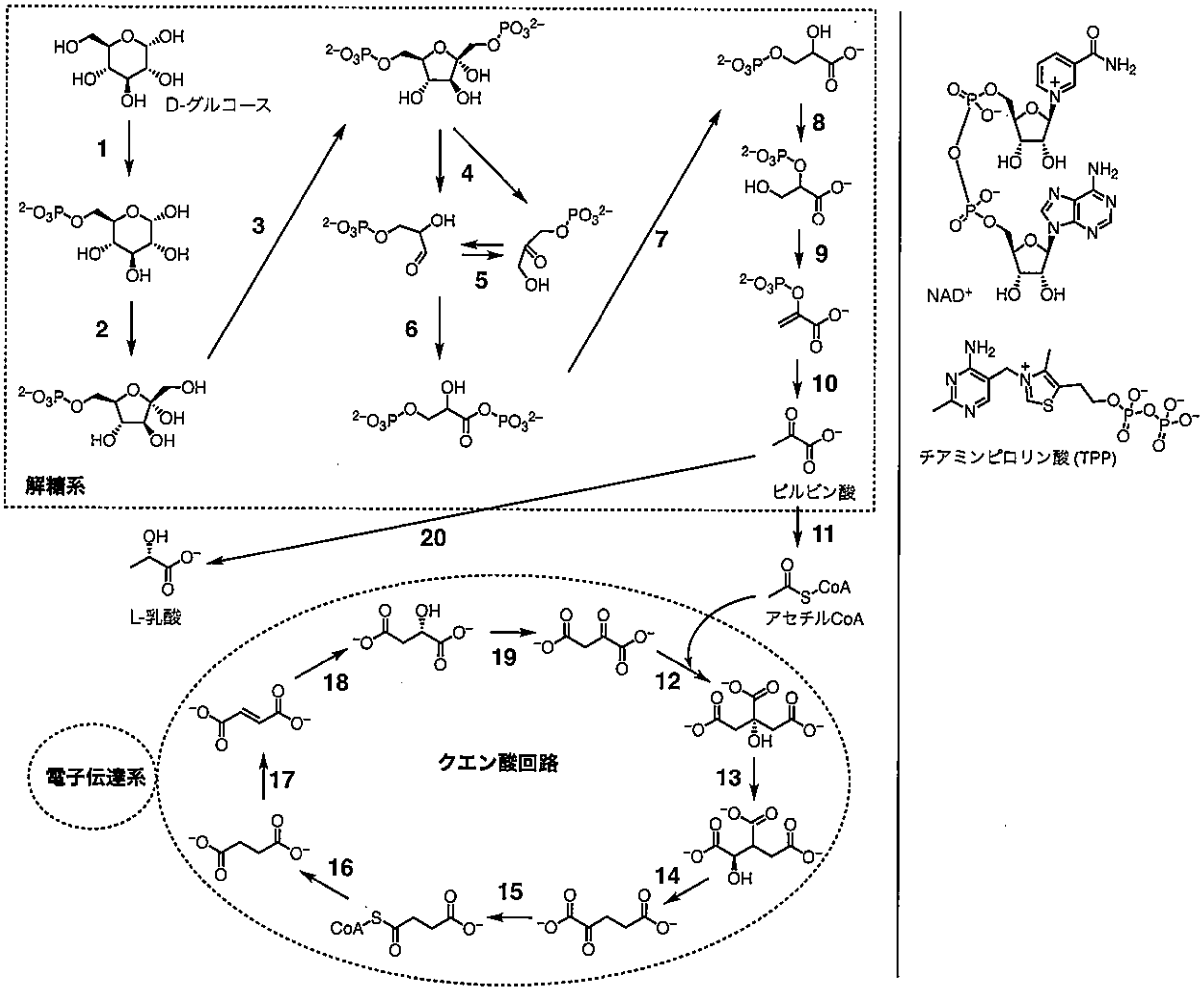
（2） 以下の３つのポリペプチドでは、どれが最も安定にαヘリックス構造を形成すると考えられるか。理由とともに答えよ。

ア） LKAENDGKARAMSEA
イ） CRAGGFPWDQGPTSN
ウ） AGKGFSRWETRIYGR

（3） ビタミンの中には特定のタンパク質の生合成や機能に必須な役割をもつものがある。①ビタミンＣが欠乏するとコラーゲンに、②ビタミンＡが欠乏すると光受容体タンパク質に、構造や機能の不全が起こる。①と②の理由をそれぞれ２、３行で記述せよ。

（２枚目に続く）

（4）グルコースからのエネルギー代謝に関して、設問に答えよ。



問1. 解糖系、クエン酸回路、電子伝達系の反応は、それぞれ細胞内のどこで行われるか。答えよ。

問2. 図の反応のうち、ATP を必要とするのはどの反応か。番号を全て答えよ。

問3. 図の反応のうち、基質レベルのリン酸化が起こるのはどの反応か。番号を全て答えよ。

問4. 図の反応のうち、NAD^+あるいは FAD を酸化剤として必要とするのはどの反応か。番号を全て答えよ。

問5. 図の反応のうち、チアミンピロリン酸を必要とするのはどの反応か。二つを選び、番号を答えよ。

問6. 反応 20 は乳酸デヒドロゲナーゼが NADH を利用して触媒する反応である。NADH の構造を踏まえて反応機構を説明せよ。なお、NADH の構造のうち反応に関与しない部分は省略して示して良い。

問7. 反応 20 は、ある条件において解糖系により継続的にエネルギーを産生するのに必要な代謝経路である。「ある条件」とはどのような条件か。また、なぜこの反応が必要なのか、説明せよ。

（3枚目に続く）

問8. 電子伝達系に関する以下の記述の中の (a)〜(e)の空欄に適切な用語を答えよ。

電子伝達系の「電子」は、解糖系およびクエン酸回路から(a)______や(b)______として電子伝達系に入り、最終的に(c)______に渡される。この伝達の過程で、電子伝達系を構成するタンパク質群の構造変化を誘起し、「電子」が持っていたエネルギーは、膜を隔てた(d)______の濃度勾配へと変換される。この濃度勾配と、それに起因する膜を隔てた電位差が ATP 合成酵素の駆動力となり、ATP が合成される。このような電子伝達系による ATP 合成機構は、1961 年に Peter Mitchell が提唱したものであり、(e)______説と呼ばれる。

5 分析化学

すべての計算問題で，有効数字は３桁とする。

（１）以下の鉄の重量分析に関する文章を読み、以下の問いに答えよ。ただし，Fe，C，O，およびＨの原子量をそれぞれ，55.85，12.01，16.00，1.008 とする。

ある鉄鉱石の試料 0.5819 g を塩酸に溶かし，鉄を+3 の状態に酸化した後(A)沈殿させ，この沈殿を沪過，(B)洗浄した後，強熱して(C)Fe_2O_3に変え，その重量を測定したら 0.2773 g であった。

① 下線部(A)で+3 の鉄を沈殿させる方法をあげよ。
② 下線部(B)で洗浄を確認する方法をあげよ。
③ 下線部(C)で鉄を Fe_2O_3 にする理由をあげよ。
④ 試料中の鉄のパーセントを計算せよ。
⑤ 上記重量分析以外で鉄の定量分析法を１つあげてその方法を説明せよ。

（２）分子量 100 の弱酸 HA がある。
① HA 0.500 g を水 50.0 mL に溶かした水溶液の pH は 4.00 であった。HA の解離定数を求めよ。
② HA が 1.00×10^{-2} M でナトリウム塩 NaA が 1.00×10^{-2} M の水溶液の pH を計算せよ。
③ NaA が 1.00×10^{-1} M の水溶液の pH を計算せよ。

（３）２つの有色物質ＸとＹの吸収スペクトルを測定したところ，光路長 1 cm のセルで次のようなデータを得た。濃度未知の溶液中のＸとＹの濃度を求めよ。

溶液	濃度（mol/L）	450 nm での吸光度	700 nm での吸光度
Ｘ単独	5.00×10^{-4}	0.800	0.200
Ｙ単独	2.50×10^{-4}	0.200	0.400
Ｘ＋Ｙ	未知	1.00	0.500

（４）溶解度に関する以下の問いに答えよ。計算過程も示すこと。
① 炭酸カルシウム水溶液中の，CO_3^{2-}のモル分率α_2を，$[H^+]$の関数として求めよ。ただし，炭酸の第１解離定数を K_{a1}，第２解離定数を K_{a2} とする。
② 炭酸カルシウムのモル溶解度 s（単位は mol/L）を$[H^+]$の関数として求めよ。ただし，炭酸カルシウムの溶解度積定数を K_{sp} とし，①のα_2を用いること。

2024 年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
一般入試・外国人留学生入試
基礎科目試験
（数学基礎・情報基礎）

試験日：　2023 年 8 月 22 日（火）

試験時間：　9 時 30 分　～　12 時 00 分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4 問すべてに解答し，解答には各問あたり 1 枚の答案用紙を使用すること。（裏面使用可）

数 学 基 礎

【1】

[1] 以下の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ.

(2) $\tan^{-1} x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

(3) 関数 $y = x^{-x}$ (ただし $x > 0$) を微分せよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2)}{x}$ を求めよ.

[2] $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ (ただし $n = 1, 2, 3, \ldots$) とするとき, 以下の各問に答えよ.

(1) I_n と I_{n-2} の関係を求めよ.

(2) I_1 を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx$ を求めよ.

【2】

[**1**] 以下の3次正方行列 $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ について以下の各問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathrm{rank}(A) = 3$ となるための x の条件を求めよ. そのような条件が存在しない場合は, それを証明せよ.

(2) $\mathrm{rank}(A) = 1$ となるための x の条件を求めよ. そのような条件が存在しない場合は, それを証明せよ.

(3) $|A| + |B| = 0$ となるための x の条件を求めよ. そのような条件が存在しない場合は, それを証明せよ.

[**2**] $\mathbb{R}^{3\times 4}$ 上の行列 $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ x & y & z & 8 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ に基づいた線形写像を考える.

- $\mathrm{Ker}(M)$ はベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ を含む.

- $\mathrm{Im}(M)$ はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を含み, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を含まない.

以上二つの条件を満たす x, y, z を求めよ. そのような x, y, z の組が存在しない場合は, それを証明せよ.

情 報 基 礎

【3】

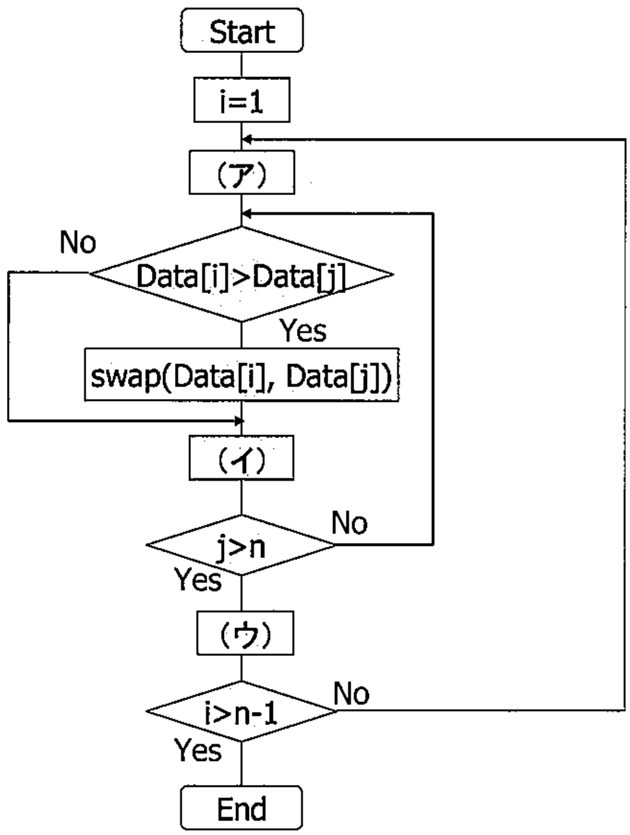
(1) 以下のソートアルゴリズムを考える．ここで，ソートの対象となるデータ列の個数 n は2以上であるとする．

- データ列を順番に先頭と比較して行き，先頭より小さければ先頭と入れ替える．
- この操作をデータ列の最後まで繰り返すと，全体で最小の値が先頭に来る．
- 最小の値を確定させ，確定されていない部分データ列だけで同じ操作を繰り返すと，その部分列で一番小さな値がその部分列の先頭に来る．
- この操作をデータ列の最後まで繰り返すと，先頭から小さい順に並び変えられる．

このソートアルゴリズムは何と呼ばれているか答えよ．

(2) 以下の図は (1) のアルゴリズムのフローチャートである．ただしデータ数を n，データ列の i 番目の要素を Data[i] とし，先頭のデータは1番目であるとし，要素 x と y の交換を swap(x, y) と表す．

このフローチャートの（ア）～（ウ）の内容を答えよ．



(3) (1) のアルゴリズムを自然言語で記述すると, 以下のように表現できる. この記述の（エ）～（キ）の内容を答えよ.

①iが（エ）から（オ）まで②の処理を行う

②jが（カ）から（キ）までData[i] > Data[j] ならばswap(Data[i], Data[j]) を実行

(4) (1) と似た動作で異なる方法のソートを行う以下のアルゴリズムを考える.

- データ列を順番に隣と比較して行き, 右隣より大きければ右隣と入れ替える.
- この操作をデータ列の最後まで繰り返すと, 全体で最大の値が末尾に来る.
- 最大の値を確定させ, 確定されていない部分データ列だけで同じ操作を繰り返すと, その部分列で一番大きな値がその部分列の末尾に来る.
- この操作を確定されていない部分データ列が先頭だけになるまで繰り返すと, 先頭から小さい順に並び変えられる.

このソートアルゴリズムは何と呼ばれているか答えよ.

(5) (4) のアルゴリズムのフローチャートを (2) にならって書け.

(6) (4) のアルゴリズムの自然言語による記述を (3) にならって書け.

【4】

図1のような木構造を図2のような書式で記述するものとする．以下の各問に答えよ．

[1] 以下の図3のような文書と等価な木構造を図示せよ．

[2] この木構造から文書を生成して表示するプログラムの一部を図4に示す．空欄(a)(b)(c)(d)を埋めてプログラムを完成させよ．ただし以下の点に注意せよ．

- このプログラムはC言語で書かれているが，文法上の細かい規約との整合性は問わない．また，表示される文書の改行の位置やインデント（字下げ）の有無は問わない．
- 木構造を構成する1個のノードを表す構造体をNodeとし，木構造の根ノードrootが変数として与えられるものとする．
- 構造体Nodeを構成する変数のうち，変数nameはタグの名前を表す文字列，変数childは子ノード群へのポインタを格納する配列，変数numは変数childの要素数を表す．

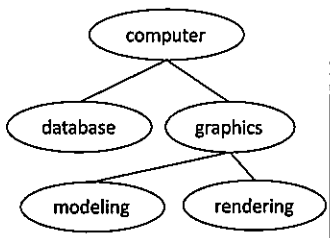


図1 木構造の例

```
computer
 {
 database
 graphics
   {
    modeling
    rendering
   }
 }
```

図2 文書の例

```
ocha
 {
 literature
 science
  {
  math
  physics
  chemistry
  biology
  computer
    {
    programming
    network
    vision
    graphics
      {
      modeling
      rendering
      }
     architecture
    }
  }
  human-life
 }
```

図3 文書の例

```
void main(Node *root) {
   processOneNode(root);
}

void processOneNode(Node *node) {
   int i;
   printf("%s¥n", node->name);
    /* (a) ここを埋める */
   for( /* (b) ここを埋める */ ) {
     Node *child = node->child[i];
      /* (c) ここを埋める */
   }
   /* (d) ここを埋める*/
}
```

図4 木構造から文書を生成するプログラムの例

[3] 以下の文章について，(e)(f)(g)(h)に当てはまる単語を回答せよ．

木構造の探索には(e)探索と(f)探索があるが，図4の文書生成プログラムには(f)探索が用いられる．このような探索に有効な関数の呼び出し方を(g)呼び出しといい，この呼び出しでシステムに積まれるものを(h)という．