2024年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学　専攻・　物理科学　コース

2 月 入 試 問 題
基 礎 科 目 試 験

試　験　日　：　2024年2月5日(月)

試験時間　：　9時 30分 〜 12時 30分

【注意事項】

1. 5問すべて解答すること。(各問100点)
2. 解答は各問あたり1枚の答案用紙に記入すること。(裏面使用可)
3. 答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。
4. 監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を開けないこと。
5. 試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目 ー 力学

図1のように長さℓのひもの一端に質量mのおもりを取り付けた振り子を考える。おもりの運動はx-y平面内に限定されるものとし、ひもがy軸となす角度をθとする。以下の問いに答えよ。重力加速度定数をgとする。

(1) おもりの運動方程式を求めよ。ひもの張力をTとする。

(2) θが十分小さいときにおもりが単振動することを示し、周期T_0と角振動数ω_0を求めよ。

次に図2のように、一端が壁に固定され、x方向に伸び縮みするばね定数kのばねの右端に振り子の支点を取り付けることにより、支点が左右の方向に動く場合を考えよう。ばねが自然長のとき、ばねの右端は原点にあり、そこからのばねの変位をaとする。ばねの質量は無視できるものとし、以下の問いに答えよ。

(3) おもりの(x, y)座標をθなどを用いて表わし、おもりの運動方程式を求めよ。

(4) おもりの振動が微小であり、θやその時間微分$(\dot{\theta}, \ddot{\theta})$の2次以上の項が無視できるとしよう。このときおもりの運動は単振動であることを示し、周期T_1を求めよ。ただし$\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}$, $\ddot{\theta} \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2}$である。

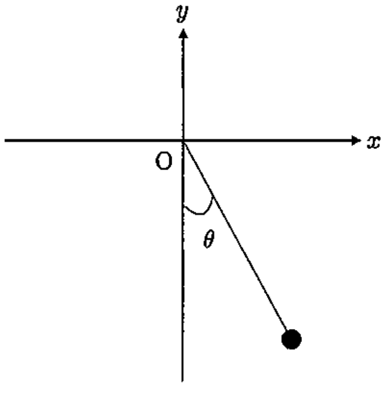

図1

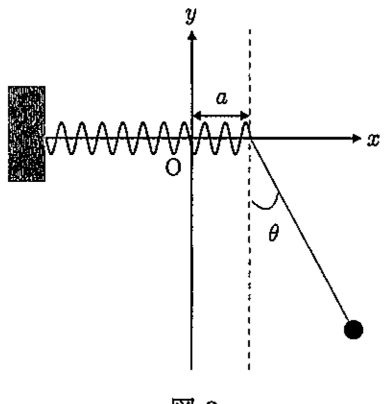

図2

2　基礎科目 — 電磁気学

抵抗 (抵抗値 R) とコンデンサ (電気容量 C) を直列に接続した回路を電源に接続する (図 1)。最初、電源は入っておらず、時刻 $t = t_0$ に直流電圧 V_0 ($V_0 > 0$) を掛けた。時刻 t における抵抗とコンデンサの間の点における電位を $V(t)$ とする。ただし、$t = t_0$ でコンデンサに蓄積された電荷はゼロであるとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1)　時刻 t に回路を流れる電流を $I(t)$、コンデンサに蓄積された電荷を $Q(t)$ とする。回路を流れる電流によってコンデンサに電荷が蓄積されることを式で表し、$I(t)$ と $Q(t)$ の関係を求めよ。

(2)　$V(t)$ が満たす微分方程式を導け。

(3)　問 (2) の微分方程式を解いて、$V(t)$ を求め、その時間変化の様子をグラフで表せ。

次に、この回路に直流電圧ではなく、振幅が V_0、周波数が ω の交流電圧 $V_0 \cos \omega t$ を掛けた場合を考える。

(4)　$V(t)$ の振幅は入力電圧の周波数 ω とともにどのように変わるか求めよ。

(5)　$\omega \to 0$ および $\omega \to \infty$ の極限で $V(t)$ がどのように振る舞うか説明せよ。

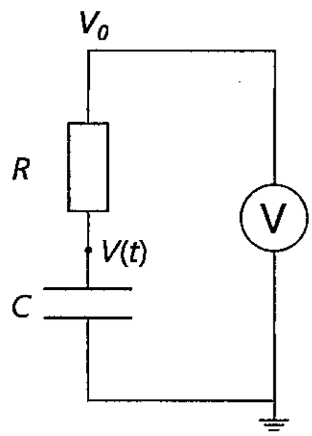

図 1

3　基礎科目 ー 物理数学

以下の設問に答えよ。

(1) 正の実数 a に対して成立する関係式

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$$

を用いて、次の積分公式を示せ。

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$$

ただし、n は正の整数とする。

(2) 複素変数 z の関数 $1/(1+z^4)$ が持つ極のうち、複素平面上の第一象限にある極における留数を求めよ。

(3) 3 次元のベクトル場 $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ は各成分が、1 階微分も 2 階微分も連続であるとする。このとき、$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{f})$ を計算せよ。さらに、面積積分と体積積分の関係を表すガウスの定理を用いて次の量を計算せよ。

$$\int\int_S (\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}dS$$

ただし、S は任意の閉曲面とし、その上の微小面積要素 dS と表し、その要素の（閉曲面の内側から外側に向かう）単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。

(4) エルミート行列の固有値が実数となることを示せ。

(5) 次の積分を複素積分を利用して計算せよ。

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1}$$

4　基礎科目 — 量子力学

古典系において、一様な磁場中での磁気モーメントは、磁場の向きと平行または反平行ではない場合に歳差運動することが知られている。このことを考慮して、量子力学におけるスピンについての理解を深めるために、磁束密度の大きさ B の一様な磁場中における大きさ 1/2 のスピンについて考えよう。このとき、ハミルトニアンを $H = g\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$ とする。ここで、g は実定数、$\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ はスピン演算子、$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ は磁束密度を表す。また、$S_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k (k = x, y, z)$ であり、$\hbar$ は換算プランク定数、σ_k はパウリ演算子

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

以下の設問に答えよ。

(1) スピン演算子に対して、交換関係 (a) $[S_z,\ S_x]$、(b) $[S_z,\ S_y]$ を求め、$S_k (k = x, y, z)$ を用いて答えよ。

(2) $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ のとき、ハミルトニアンを $H = \omega_0 S_z$ と表すことができる。ここで、$\omega_0 = gB/2$ とした。ここで、S_z の固有値は $\pm\hbar/2$ で、それぞれの規格化された固有状態を $|\pm\rangle$ とすると、スピンの任意の純粋状態は $|\Psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ と表すことができる。a、b は $|a|^2 + |b|^2 = 1$ を満たす複素数である。いま、状態 $|\Psi\rangle$ を初期状態（$t = 0$）として、時刻 t におけるスピンの状態 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。状態の時間発展は $|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-iHt/\hbar}|\Psi\rangle$ で与えられ、

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。

(3) 時刻 t におけるスピン演算子の期待値 $\langle S_k\rangle_t = \langle\Psi(t)|S_k|\Psi(t)\rangle$ を $k = x, y, z$ の場合それぞれに求めよ。

(4) 時刻 t におけるベクトル $\langle\mathbf{S}\rangle_t = (\langle S_x\rangle_t, \langle S_y\rangle_t, \langle S_z\rangle_t)$ がどのような時間変化をするか。初期状態において $a = b = 1/\sqrt{2}$ として説明せよ。

5　基礎科目 ― 熱・統計力学

(1) N 個の独立な粒子からなる系を考える。各粒子は、エネルギーが 0 または $\epsilon(>0)$ の 2 つの状態のみをとる。また、絶対温度を T とする。以下ではエネルギーを導出するとともに、この系の比熱を求める。

(a) 分配関数 $Z(N,T)$ を求めよ。

(b) 内部エネルギー $E(N,T)$ を求めよ。

(c) 比熱 $C(N,T)$ を求めよ。

(d) 比熱の温度依存性のグラフを描いたとき、どのような曲線を示すか考える。温度を絶対零度から上昇させたとき、比熱は (A) 常に増加、(B) 常に減少、(C) 増加・減少を示し極大を 1 つ持つ、(D) 減少・増加を示し極小を 1 つ持つ、(E) 増加・減少・増加を示し極大と極小を各 1 つ持つ、の中でどの振舞いを示すか答えよ。

(2) ある状態の酸素分子の定積比熱が C_V=0.1573 (cal/g·K)、定圧比熱が C_P=0.2198 (cal/g·K) であるとき、これを理想気体と考えて、仕事 (J) と熱量 (cal) の比を示す熱の仕事当量を求めよ。なお、酸素分子の分子量は 32 (g/mol)、気体定数 R=8.314 (J/mol·K) とする。

2024年度　お茶の水女子大学
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学専攻・情報科学コース
一般入試・外国人留学生入試
基礎科目試験
（数学基礎・情報基礎）

試験日：　2024年2月5日（月）

試験時間：　9時30分　～　12時00分

【注意事項】

1. 監督者の「はじめ」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
2. 試験中，用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。
3. 4問すべてに解答し，解答には各問あたり1枚の答案用紙を使用すること。（裏面使用可）

数 学 基 礎

【1】

[1] 以下の各問に答えよ.

(1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ のマクローリン展開の x^n の係数を求めよ.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2024}}$ の近似値を小数第 3 位を四捨五入して, 小数第 2 位まで求めよ.

[2] 非負整数 m, n に対して, 定積分

$$B(m,n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n \, \mathrm{d}x$$

を定めるとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $B(m,n) = \dfrac{n}{m+1}B(m+1,n-1)$ を示せ.

(2) $B(m,n) = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ を示せ.

【2】

[1] 次の実対称行列 A について，以下の各問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 適当な直交行列 P を求めて対角化せよ．

(2) A^n を求めよ．

[2] $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x - y + 2w = 0 \\ x + z + w = 0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} z = -2y \\ z = 2w \end{array} \right\}$$

について，以下の各問に答えよ．

(1) 共通部分 $W_1 \cap W_2$ の次元と1組の基底を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底を含むように，W_1, W_2 の基底をそれぞれ求めよ．

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の W_1 への正射影 $\boldsymbol{b}$ を求めよ．

情 報 基 礎

【1】以下の各問に答えよ.

[1] 命題論理の論理式 $((\neg P \vee R) \wedge (Q \to P))$ の真偽値表について，以下の空欄 A から D までを埋めよ．ただし P, Q, R は命題記号とする.

P	Q	R	$((\neg$	P	$\vee$	$R)$	$\wedge$	$(Q$	$\to$	$P))$
1	1	1	A	1	B	1	C	1	D	1
1	1	0		1		0		1		1
1	0	1		1		1		0		1
1	0	0		1		0		0		1
0	1	1		0		1		1		0
0	1	0		0		0		1		0
0	0	1		0		1		0		0
0	0	0		0		0		0		0

[2] 以下のうち，正しいものには○，誤りを含むものには×を，それぞれ理由とともに記せ.

1. X が $|X| = 2$ であるような有限集合であるとき，$|X^{\mathcal{P}ow(X)\times X}| = 256$ である.
2. $\neg\phi \vee \phi$ は矛盾律と呼ばれる恒真式である.
3. 命題論理において，命題記号が存在しない場合は，解釈の個数は 0 個である.
4. 命題論理においては，すべての論理式について，それと意味論的に同値な選言標準形と連言標準形の論理式が存在する.
5. $\models \phi \to \psi$ ならば，$\models \neg\phi$ であるか $\models \psi$ であるかのいずれかである.
6. $\Gamma \models$ ならば，Γ に含まれる任意の二つの論理式は互いに矛盾している.
7. $(\forall y(F(f(x), y)))[y/x] \equiv \forall z(F(f(z), y)$ である．ただし x, y, z は変項、f は一項演算子、F は二項述語とする.
8. 一階述語論理においては，$\Gamma, \neg\phi$ を根とするタブローが閉じても，$\Gamma \models \phi$ が成立するとは限らない.
9. 一階述語論理の枠組み $M = (D_M, F_M)$ において D_M が空集合である場合，$\forall x\phi \not\models \exists x\phi$ であるが，それに反してタブロー法では $\forall x\phi \models \exists x\phi$ であることが示される.

【2】キーの値とそのキーに対応するデータを含むレコードを格納する索引木を考える．この索引木は以下の条件 (i) 〜 (iv) を満たすとする．

- (i) 根ノードから各葉ノードまでのパスの長さ（ノード数）は全て同じである．パスの長さを木の高さ h という（h：整数）．
- (ii) 根ノードはキー値の小さい順に並んだ x 個のレコード $R_1, R_2, \ldots, R_x$ を持つ．ただし，$1 \leq x \leq 2k$ である（k: 整数）．
- (iii) 根ノード以外のノードはキー値の小さい順に並んだ x 個のレコード $R_1, R_2, \ldots, R_x$ を持つ．ただし，$k \leq x \leq 2k$ である．
- (iv) x 個の値を持つ葉ノードではないノード N は，$x+1$ 個の子ノードへのポインタ $P_1, \ldots, P_{x+1}$ を持つ．ポインタ $P_y (1 \leq y \leq x+1)$ の指す部分木に格納された全てのレコードのキー値 K は次の条件 (a)〜(c) を満たす．ここで，$Key(R_y)$ はノード N のレコード R_y のキーの値を表す．
  - (a) $y = 1$ の時，$K < Key(R_1)$
  - (b) $1 < y < x+1$ の時，$Key(R_{y-1}) < K < Key(R_y)$
  - (c) $y = x+1$ の時，$Key(R_y) < K$

$k = 1, h = 3$ の索引木の例は図 1 に示される．ただし，簡単のため，レコードをキーの値で表現する．

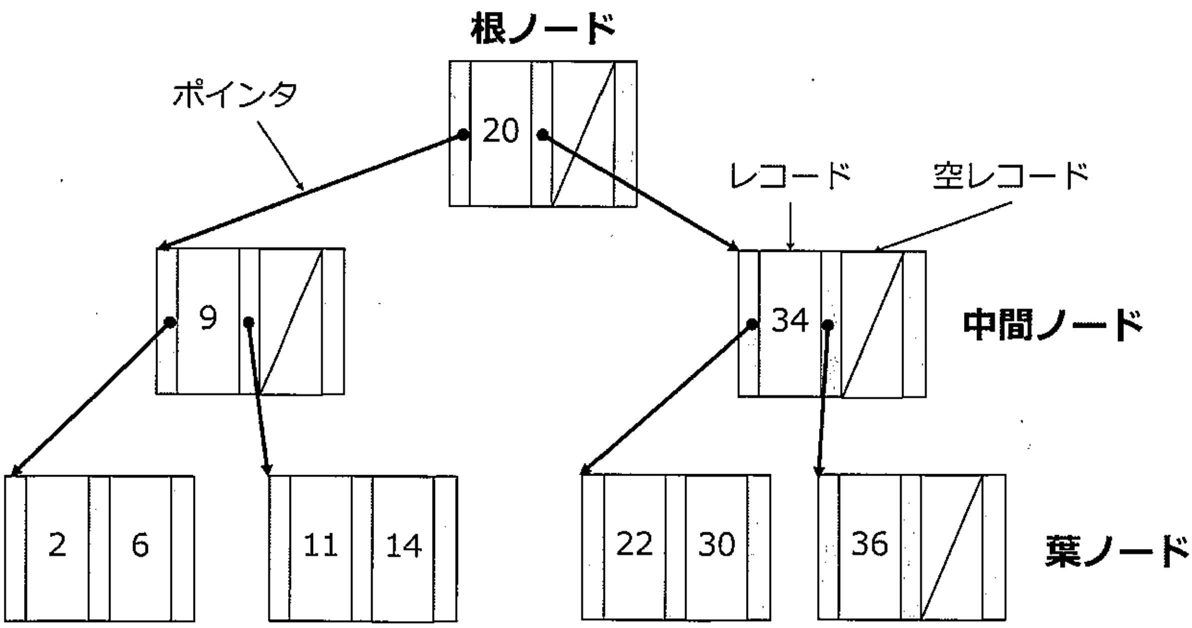

図 1: $k = 1, h = 3$ の索引木

この索引木では，上の条件 (i)〜(iv) を満たすように，レコードの挿入の手順は以下のように実装される．

- **ステップ1**：挿入レコードはまず葉ノードに格納することとする．挿入レコードのキー値を用い，根ノードを初期ノードとし，キー値に応じて子ノードポインタを順次に葉ノード方向に辿り，レコードを格納すべき葉ノード LN を特定する．
- **ステップ2**：LN に入っているレコード数が $2k$ 個未満であれば，LN の適切な位置に挿入レコードを格納し終了する．逆に LN のレコード数が $2k$ 個の場合は**ステップ3** に進む．
- **ステップ3**：LN のレコード数が $2k$ 個の時は，ノードの分割を行う．まず，新たなノード LN' を確保し，挿入レコードも含めた $2k+1$ 個のレコードのうち，キー値の小さい方 k 個を LN に，大きい方 k 個を LN' にそれぞれ順序を保ちつつ格納する．そして，それらの中間キー値を持つレコード R と LN' へのポインタ $P(LN')$ をペアにし，LN の親ノードへ挿入する．
- **ステップ4**：親ノードでは，レコード R とポインタ $P(LN')$ のペアを挿入レコードとみなして，上の**ステップ2**と**ステップ3**と同様の処理を行う．ただし，ノードの分割が根ノードに波及し LN が根ノードとなった場合には，**ステップ3**では親ノードへ R と $P(LN')$ を挿入する代わりに，新たなノードを根ノードとして確保し，$P(LN), R, P(LN')$ を格納する．ここで索引木の高さが 1 増える．

上の索引木に対して，下記の問題を答えよ．

(1) 図 1 に示される索引木に以下の操作を順番に行った時の変化をすべて図示せよ．

- キー値 40 のレコードを挿入
- キー値 28 のレコードを挿入
- キー値 32 のレコードを挿入
- キー値 29 のレコードを挿入

(2) 高さ h と整数 k の索引木に格納可能なレコード数の最大値と最小値を求めよ．