お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科

平成３０年度入学試験（2月期）問題

一般選抜用

一般・基礎教育科目

理学専攻

数学コース用

時間　９：３０－１１：３０

注意事項

試験開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません

(1) この冊子は持ち帰ってください．下書き用紙が不足するときや解答用紙を破損したときは手を挙げてください．
(2) 問題１から問題２まですべての問題に対して，それぞれ別の解答用紙に解答してください．解答用紙は裏面を使ってもかまいませんが，そのむねを表面に明記してください．
(3) 印刷の不明瞭な部分，ページの脱落などがあった場合は申し出てください．

問題1

(1) $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

で定義する。このとき f の原点 $(0,0)$ における全微分可能性を調べよ。

(2) a、b を $b>a$ となる定数とし、$g(x)$ を有界閉区間 $[a,b]$ で連続な実数値関数とする。関数 g が下に凸な関数であるとき　$a\leq x-h<x+h\leq b$ を満たす任意の $x\in(a,b)$ と任意の $h>0$ に対して

$$g(x)\leq\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}g(t)dt$$

が成り立つことを示せ。

(3) $p(x)$ を $[0,\infty)$ で単調増加で連続な実数値関数とし、$P(x)$ を $(0,\infty)$ で

$$P(x)=\frac{1}{x}\int_0^x p(t)dt$$

と定義する。このとき $P(x)$ は単調増加な関数であることを示せ。

問題2

(1) 4次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を次のように定める．

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y-z=0 \\ 2x-3y+u=0 \end{matrix} \right\}$$

$$W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x-2z+u=0 \\ 4x+4y-3u=0 \\ 4y+4z-5u=0 \end{matrix} \right\}$$

このとき，W_1, W_2, W_1 と W_2 の和空間 W_1+W_2 と，W_1 と W_2 の共通部分 $W_1 \cap W_2$ の基底と次元をそれぞれ求めよ．

(2) 線形写像の定義を書き，次の (i),(ii) の写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が線形写像かどうか理由をあげて答え，線形写像ならば f の標準基底に関する表現行列と，f の核と像の次元と基底を求めよ．

(i)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3 \\ x^2+xy \end{pmatrix}$$

(ii)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ y+z \end{pmatrix}$$

(3) 2×2 行列 A が2つの固有値 $-1, 2$ を持ち，固有値 -1 に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，固有値2に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，行列 $B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} O & A \\ A & O \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトル空間の基底をそれぞれ答えよ．ただし，O は 2×2 零行列とする．

平成３０年度

人間文化創成科学研究科・博士前期課程

理学専攻・物理科学コース

８月入試問題

基礎科目試験問題

（物理科学に関する基礎科目）

試験時間：９：３０—１２：３０

注意事項

（１）４問すべて解答すること。（各問１００点）

（２）解答は各問あたり１枚の答案用紙に記入すること。
　　（裏面使用可）

（３）答案用紙に問題番号と問題名を記入すること。

（４）監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を開けないこと。

（５）試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　基礎科目− 力学

- ◆ 時間内に解けなくても自分の考えと計算の方針を明示してください.
- ◆ 物理量や物理定数は，明示したうえで記号で書いていいです.
- ◆ 定量的に議論し，結論は必ず論拠を示してください.

振子の支点を水平方向に動かしたあと再び止める操作を考える．初め静止していた振子がいったん揺れた後，元の静止状態に戻るためには，例えばどのように支点を動かしたらよいか．振幅は小さいと考えてもよい．

以下を考えていくといいかもしれないが，自由に考察してよい．

- 現象をイメージしてみてください．そのような動かし方は可能でしょうか？
- 振子のポテンシャルエネルギーを書いてみてください．運動を記述する変数はどう選ぶのが便利でしょう？
- 振子の運動エネルギーを書いてみてください.
- 運動方程式を立ててみてください.
- 先のイメージを大切にして，できるだけ簡単な場合を想定して運動方程式を解いてみてください.

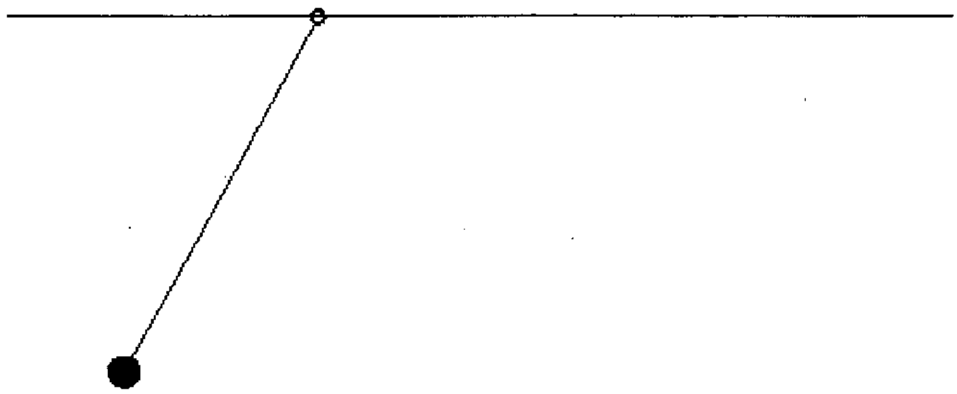


図 1

2 基礎科目- 電磁気学

シャボン玉に電荷を与えるとどうなるか思考実験してみよう。電荷をもっていない場合、これから議論するシャボン玉の膜は単位面積当たり γ の表面エネルギーを持っているとし、シャボン玉の半径が R_0 の球だとすると、その全表面エネルギーは $U_\gamma = 4\pi R_0^2 \gamma$ であるとする。以下、シャボン玉の内外の気体の誘電率は真空の誘電率 ε_0 とみなすことにする。また、シャボン玉の外部の気体の圧力を p_0 とし、シャボン玉の膜の厚みは、シャボン玉の半径に比べて無視できるほど薄いとする。

1. 電荷がない場合、仮想的にシャボン玉の半径を ΔR だけ大きくしたときのエネルギー変化をシャボン玉の表面積 $4\pi R_0^2$ で割った量を考えることにより、シャボン玉の単位面積あたりに働く力（応力あるいは圧力）を求め、答えが圧力の次元になっていることを示せ。エネルギー U_γ がシャボン玉を小さくしようとする傾向があることに注意して、その応力の向きを答えよ。

2. このシャボン玉が、電荷のない状態で釣り合いの状態にあるとする。この場合のシャボン玉の内部の気体の圧力を求めよ。

   以下の設問は、シャボン玉に電場をかけるなどして、少量の電荷 Q をゆっくりと与えた場合の状態を考える。この状態でのシャボン玉の半径を R とする。電荷は、シャボン膜内から出ることができないとすると、シャボン玉表面に一様に分布すると考えられる。以下、これを仮定しよう。

3. シャボン玉の中心からの距離 r の場所での電場の強さ $E(r)$ を求めよ。

4. シャボン玉の中心からの距離 r の場所での電位 $\phi(r)$ を求めよ（シャボン玉の中心から無限大での場所を基準とする）。

5. シャボン玉に与えた電荷 Q の静電エネルギー U_Q を求めよ（シャボン玉の中心から無限大での場所を基準とする）。

6. 問 1 のように仮想的変位を考えて、静電エネルギーに由来する、シャボン玉の単位面積あたりに働く力（応力）を求めよ。

7. 一般に、電場の生じている空間には電場の方向に大きさ $\varepsilon_0 E^2/2$ の大きさの張力が働いているとみなすことができる（マクスウェルの応力）。この観点から問 6 で求めた応力について説明せよ。

   シャボン玉のエネルギーが、単純に、全表面エネルギーと静電エネルギーの和で与えられるとしてみよう。

8. この場合のシャボン玉の内部の気体の圧力を求めよ。

9. シャボン玉内の気体は理想気体だとして、また、その温度の変化は生じなかったとする。このとき、$p_0, R_0, \gamma, \varepsilon_0, Q$ を用いて、シャボン玉の半径 R が満たすべき条件式を書け。

3 基礎科目− 物理数学

以下の問いに答えよ。

(1) n 行 n 列の行列 A、B について、次の問いに答えよ。

(i) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$、および $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ であることを示せ。ここで、Tr は対角和、T は転置をあらわす。

(ii) 行列 A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする。e^A の固有値を表せ。ここで、A は実対称行列であるとする。

(2) 次の積分の式を示せ。ただし、$a > 0, b > 0$ とする。

$$\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos 2bx \; dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-b^2/a}$$

(3) 次の微分方程式の解を求めよ。ただし、$y(x)$ は x の実関数であり、$y(0) = \frac{1}{2}$、$\frac{dy(0)}{dx} = \frac{1}{4}$ とする。

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 4y(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

(4) 次の積分の計算をせよ。ただし、$a > 0, b > 0$ とし、n は正の整数とする。

$$\text{(i)} \quad \int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-ax} dx, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx \; dx$$

4 基礎科目- 量子力学

次のような一次元ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子を考える：

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < a) \\ \infty & (|x| > a) \end{cases} \tag{1}$$

以下の問に答えなさい。

1. エネルギー $E\ (>0)$ で運動する粒子が従うシュレディンガー方程式を書きなさい。
2. 前問のシュレディンガー方程式にパリティ変換（すなわち $x \to -x$）を施し、変換前後の方程式の形を比較しなさい。
3. 一般に、波動関数 $\psi(x)$ に対してパリティ変換を施したとき、$\psi(-x) = \psi(x)$ となるものをパリティ偶 (even)、$\psi(-x) = -\psi(x)$ となるものをパリティ奇 (odd) と呼ぶ。前問の結果より、問 1 のシュレディンガー方程式の解はパリティ偶もしくはパリティ奇のいずれかであることを示しなさい。
4. 条件 (1) を考慮し、波動関数のパリティが偶の場合のエネルギー固有値と規格化された波動関数 $\psi(x)_{\mathrm{even}}$ を求めなさい。
5. 条件 (1) を考慮し、波動関数のパリティが奇の場合のエネルギー固有値と規格化された波動関数 $\psi(x)_{\mathrm{odd}}$ を求めなさい。
6. 横軸を x 軸にとり、基底状態および第一励起状態の波動関数の振る舞いをそれぞれ図示しなさい。

平成３０年度

人間文化創成科学研究科・博士前期課程

理学専攻・物理科学コース

２月入試問題

専門科目試験問題

（物理科学に関する専門科目）

試験時間：１３：３０―１５：３０

注意事項

（１）４問中２問選択すること。（各問１５０点）
（２）解答は各問あたり１枚の答案用紙に記入すること。
　　（裏面使用可）
（３）答案用紙に選択した問題番号と問題名を記入すること。
（４）監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を開けないこと。
（５）試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1 専門科目- 熱・統計力学

以下の問いに答えよ。

質量 m の質点がバネ定数 k のバネにつながれた古典的な 1 次元調和振動子の系を考える。平衡点からの変位 x と質点の運動量 p を用いて、系のハミルトニアンは次式で表される。

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

(1) 調和振動子の角振動数 ω を求めよ。

(2) この系が絶対温度 T の熱浴に接しているとき、その分配関数 Z_c を計算せよ。

(3) 一般に、絶対温度 T の熱浴に接する系において、状態 n における系のエネルギーを E_n と表すとき、逆温度 $\beta = 1/(k_B T)$ を用いて、系の分配関数は次のように表される。

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

このとき、系の内部エネルギー U と分配関数 Z の間に次の関係式が成立することを示せ。

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$

(4) 古典的 1 次元調和振動子の分配関数 Z_c から内部エネルギー、そして比熱を導け。

次に、絶対温度 T の熱浴に接している角振動数 ω の量子力学的な 1 次元調和振動子の系を考える。量子数 n に対するエネルギー固有値 E_n は、次のように表される。

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

(5) 角振動数 ω の量子力学的な 1 次元調和振動子の分配関数 Z_q を求めよ。

(6) 角振動数 ω の量子力学的な 1 次元調和振動子の内部エネルギーと比熱を求めよ。

(7) 絶対温度 T の熱浴に接している 1 次元調和振動子の量子系における比熱の高温極限と低温極限を導き、古典系との相違点を述べよ。その違いが生じる理由を簡潔に説明せよ。

(8) 2 原子分子の理想気体を考える。分子間の振動エネルギーを約 2000 K と仮定して、常温から 2000 K より高温の領域における定積比熱の温度変化の特徴を述べよ。

ただし、$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2)dx = \sqrt{\pi/A}$ は既知とする。

2 専門科目- 物性 （実験）

(1) 物質の電気抵抗は測定に用いる試料の大きさや形状に依存する。物質が持つ固有の導電性を議論するときは体積や形状に依存しない抵抗率を用いなければならない。その抵抗率 ρ の単位は $[\Omega \cdot \mathrm{m}]$ であることを示せ。

(2) 超伝導物質の電気抵抗の温度変化を、超伝導転移温度 T_c の近傍で正確に測定するために配慮しなければならない点を３つ以上挙げよ。

一般的に測定は以下のような状況を伴う。試料には一定の電流を流しておいて発生する電圧を測定して抵抗を求める。超伝導試料の常伝導状態での抵抗は１Ωよりもずっと小さく、低温容器に入れられた試料から容器の外の電圧計までのリード線（銅の導線）の抵抗と同じ程度の小ささになりうる。T_c 以下で抵抗は急激にゼロになる。有限の大きさの試料は有限の熱容量を持っている。試料の温度を知るための手段はいくつか考えられる。

(3) 測定値がノイズ（雑音）に起因する誤差を含むときは、測定を多数回行い測定値の平均をとると誤差を低減できることを示せ。ただし、一回の測定で得られる測定値を $V+v$ としたとき（V は時間に依存しない真の値)、測定ごとに変動するノイズ成分 v は平均値 $\langle v \rangle$ がゼロで分散が $\langle v^2 \rangle$ の正規分布に従い、異なる測定における v に相関はないとする。

(4) 複数の独立な雑音源からのノイズ信号 v_1、v_2 $\cdots$ が同時に加わる場合、合成されたノイズ成分の実効値は

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle + \cdots}$$

というかたちで増加することを示せ。

3 専門科目− 物性 （理論）

金属中の電子の運動を古典力学で考える。電場$\mathbf{E}$、磁場$\mathbf{B}$がかかっているときの運動方程式は

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) - \frac{m\mathbf{v}}{\tau}$$

である。$\mathbf{v}$は速度、τは平均衝突時間である。

(1) $\mathbf{E} = 0$、$\mathbf{B} = 0$の場合の運動方程式の解$\mathbf{v}$を求めよ。

(2) $\mathbf{B} = 0$、$\mathbf{E} = (E_{0x}, 0, 0)$の場合の運動方程式の解$\mathbf{v}$を求めよ。$E_{0x}$は定数である。$t \to \infty$でどのような運動をするか答えよ。

(3) $\mathbf{E} = 0$、$\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$、$\tau = \infty$の場合の運動方程式の解$\mathbf{v}$を求めよ。B_0は定数である。

(4) $\mathbf{E} = (E_{0x}, E_{0y}, 0)$、$\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$の場合の運動方程式の解$\mathbf{v}$を求めよ。ただし、$t \to \infty$での$\mathbf{v}$一定の定常解のみを求めればよい。$E_{0y}$は定数である。

電子密度をnとすると、電流密度は

$$\mathbf{j} = n(-e)\mathbf{v}$$

である。

(5) (4)でy方向の電流をゼロとする。このときy方向の電場を求めよ。

4 専門科目– 素粒子・宇宙

ミューオン μ^- は電子の約 200 倍の質量をもつが、他の性質は電子と非常によく似ており、電子と同様に電荷 $-e$、スピン $\vec{s}$ の大きさ 1/2、そして磁気双極子モーメント

$$\vec{I} = g\frac{e\hbar}{2m}\vec{s} \tag{1}$$

をもつ。ここで、e は素電荷、m はミューオンの質量、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。g は磁気回転比と呼ばれる量で電子やミューオンの場合 $g \simeq 2$ である。

ミューオンは $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ と電子、ミュー・ニュートリノおよび反電子ニュートリノに崩壊し、崩壊率 Γ [s^{-1}]（単位時間あたりに崩壊する確率）および崩壊後に放出される電子の角度分布を計算することができる。図 1 のように、電子の放出される角度 θ をミューオンのスピンの向きを基準にとると、放出される電子の個数 N は θ によって異なり

$$\frac{dN}{d\cos\theta} \propto 1 - \frac{1}{3}\cos\theta \tag{2}$$

で与えられることが知られている。（電子のエネルギーについては全て積分したものである。）以下の設問に答えよ。

(1) 時刻 $t=0$ でミューオンを N_0 個用意する。（あるいはミューオンを一つ用意した実験を N_0 回繰り返す。）時刻 $t>0$ において崩壊せずに残っているミューオンの数を $N(t)$ としたとき、$N(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(2) 問 (1) で導いた微分方程式を解いて $N(t)$ を時刻の関数として表せ。

次に、磁場中にあるミューオンの崩壊について考える。ハミルトニアンは磁束密度 $\vec{B}$ を用いて $H = -\vec{I}\cdot\vec{B}$ と与えられるものとし、以下の設問では z 軸方向に磁束密度 B がかかっているものとする。時刻 $t=0$ で原点に μ^- を N_0 個おく。初期状態のミューオンは、$|\uparrow\rangle$ を $s_z = \frac{1}{2}$ の状態、$|\downarrow\rangle$ を $s_z = -\frac{1}{2}$ の状態として、$|\Psi(t=0)\rangle = \cos\alpha|\uparrow\rangle + \sin\alpha|\downarrow\rangle$ と表せるものとする。ただし、α は実数である。スピンの各成分は、以下のパウリ行列を使って $s_k = \frac{1}{2}\sigma_k (k=x,y,z)$ と表すことができることを用いてもよい。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) ハミルトニアン H を 2×2 行列で表せ。

(4) 時刻 t における状態 $|\Psi(t)\rangle$ を求めよ。

(5) 時刻 t における磁気双極子モーメントの x 成分と y 成分の期待値 $\langle I_x\rangle$ と $\langle I_y\rangle$ を求めよ。

(6) 問 (5) の結果より、ミューオンのスピンは z 軸の周りで歳差運動することを説明し、その周期を求めよ。

(7) 時刻 t において I_y の固有値が $\pm g\frac{e\hbar}{4m}$ になることを説明し、それぞれの固有値が得られる確率 $P_\pm$ をそれぞれ求めよ。

(8) 図 2 のように y 軸上においた検出器で、μ^- が崩壊して生じる電子を検出して、その時刻を測定する。式 (2) を考慮して、検出される電子の個数が時刻とともにどう変化するか、その特徴が分かるようにグラフを描け。

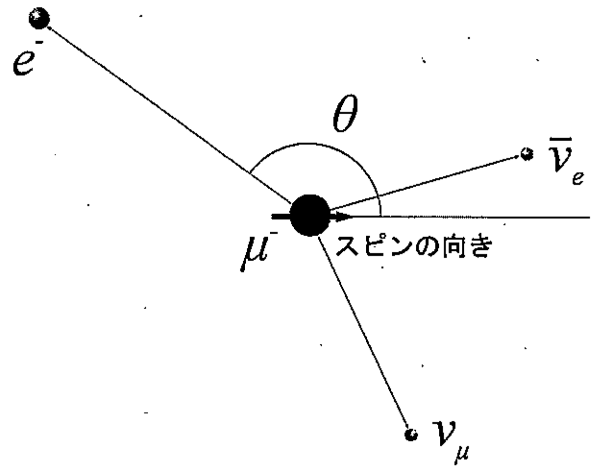


図 1: ミューオンの崩壊過程 $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ における電子の放出角度の定義。

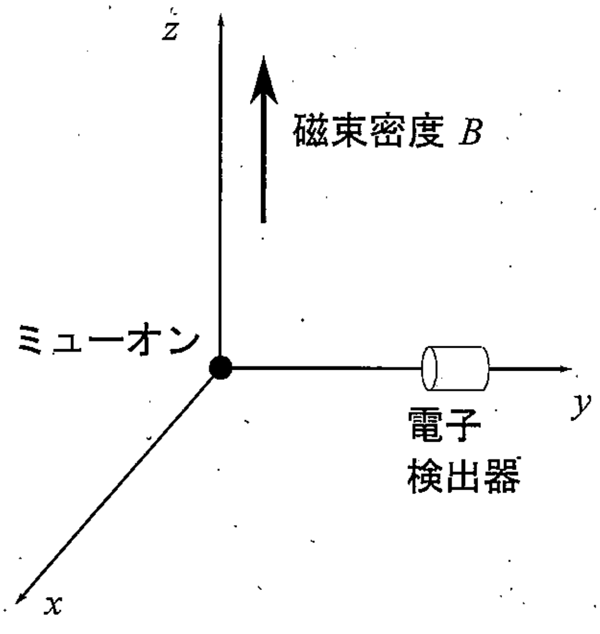


図 2: 磁場中においたミューオンと電子が放出された時刻を測定するための検出器。

平成30年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学 専攻 ・ 化学・生物化学コース

2　月　院　試

専 門 科 目 試 験 問 題

試　験　日 ：　平成 30年 2月 5日（月）

試 験 時 間 ：　9時 30分 ～ 12時 30分

【注意事項】

1. 5問中4問選択すること。（各問100点）

2. 解答は各問題分野あたり1枚の答案用紙に記入すること。
(裏面使用可)

3. 解答番号欄に、選択した問題分野の番号を記入すること。

4. 監督者が「始め」の合図をするまで、問題冊子を開けない

5. 試験中、用のある場合は挙手をして監督者を呼ぶこと。

1　物理化学

（1）　水素分子に関する以下の問に答えよ。

i)　水素原子の 1s 原子軌道関数 $\chi_a(\mathbf{r})$, $\chi_b(\mathbf{r})$ からなる水素分子の二つの分子軌道関数（波動関数）ψ_1 と ψ_2 の式をそれぞれ記せ。但し、規格化定数を N_1, N_2 とせよ。

ii)　軌道エネルギー相関図（準位図）を定性的に描け。ただし、ψ_1 のエネルギーは ψ_2 のエネルギーより低いものとする。

iii)　問 ii) の図に、ψ_1 と ψ_2 の概形を描き加えよ。

iv)　ψ_1 と ψ_2 の軌道の対称性を表す規約表現を答えよ。

v)　ψ_1 と ψ_2 について、それぞれの確率密度の式を記せ。ψ_1 と ψ_2 の確率密度における両者の最も大きな違いは何か。確率密度の式に基づいて説明せよ。

（2）　ある気体の状態方程式が次に示すように第二ビリアル係数 B までで表されるとする（P: 圧力、V: 体積、T: 温度、n: 物質量、R: 気体定数)。この気体に関する以下の問 i)〜iv) に答えよ。

$$\frac{PV}{nRT} = 1 + \frac{nB}{V}$$

i)　この気体を温度 T で体積 V_1 から V_2 まで等温可逆圧縮したときに、気体になされる仕事 w を求めよ。また、理想気体に対して同じ操作を行った時の仕事との差 Δw を計算せよ。

ii)　第二ビリアル係数 B が、正の定数 a, b を用いて次式で表されるとする。

$$B = b - \frac{a}{RT}$$

この式から分かるように、B は温度によって正負いずれの値もとりうる。実在気体では分子間相互作用が働くことを考慮して、B の温度による符号の変化を説明せよ。

iii)　問 i) の可逆変化で、気体の内部エネルギー U がどれだけ変化したかを考える。次頁の文章の **A~E** に入る適切な式を記せ。また、下線部①のマクスウェルの関係式を証明せよ。

熱力学第一法則より、UはエントロピーSおよび液体の体積Vと次の関係式で結びつけられている。

$$dU = [\quad \mathbf{A} \quad]dS + [\quad \mathbf{B} \quad]dV$$

一方、Sは温度 Tと体積Vの関数として

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

と書けるので次式が成り立つ。

$$dU = [\quad \mathbf{C} \quad]dT + [\quad \mathbf{D} \quad]dV$$

したがって、次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = [\quad \mathbf{D} \quad]$$

この式を ①マクスウェルの関係式

$$\underline{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}$$

を用いて変形すると次式が求まる。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = [\quad \mathbf{E} \quad]$$

iv) 理想気体の内部エネルギーが体積に依存しないことを証明せよ。

2 無機化学

(1) 次の（ｉ）～（iv）の記述において，予想される化学反応を例にならって書け。

(例) 塩化バリウム水溶液に希硫酸を加える。

[答え]　$Ba^{2+} + SO_4^{2-} \rightarrow BaSO_4$　または　$BaCl_2 + H_2SO_4 \rightarrow BaSO_4 + 2HCl$

（ｉ）水酸化カルシウム水溶液に二酸化炭素を通じ続けると，はじめに白沈が生じ，その後白沈は消失する。

（ii）硫酸銅の水溶液に濃アンモニア水を加え，青白色のコロイド状沈殿が生じた溶液に，さらに濃アンモニア水を加え濃青色の溶液を得る。

（iii）金属銅に濃硝酸を加える。

（iv）シュウ酸の硫酸酸性水溶液に過マンガン酸カリウム水溶液を加える。

（２）金属ナトリウムについて，(i) 実験室での適切な保存方法，および、(ii) 発火した場合の適切な消火方法を記せ。またその根拠について述べよ。

（３）以下の（ｉ）～（ｖ）の語について説明せよ。

（ｉ）　ランタノイド収縮

（ii）　硬い酸・塩基および軟らかい酸・塩基（ＨＳＡＢ）の概念

（iii）　原子価殻電子対反発（ＶＳＥＰＲ）理論

（iv）　１８電子則

（ｖ）　結晶場安定化エネルギー

3　有機化学

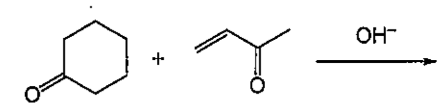
（1）　次の(i)～(iii)の各組の化合物をそれぞれの指示通りに並べ替えよ。また、その理由も述べよ。

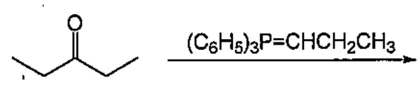
(i) 沸点の高い順：　$CH_3CH_2CH_3$，CH_3OCH_3，CH_3CH_2OH

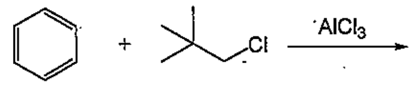
(ii) 酸性度の高い順：　CH_3OH，CH_3SH

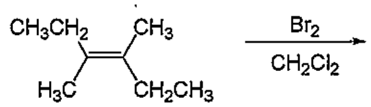
(iii) E2 反応の反応性の高い順：$(CH_3)_3CCl$，$(CH_3)_3CBr$，$(CH_3)_3CF$，$(CD_3)_3CF$

（2）　以下の(i)～(iv)の反応の主生成物を示し、その反応機構を詳細に記せ。(iv)については立体化学が分かるように記せ。

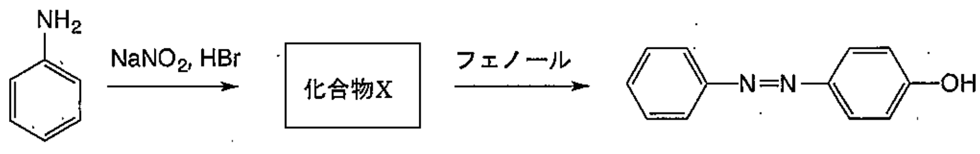
(i)


(iii)


(ii)


(iv)


（3）　アニリンから 4-ヒドロキシアゾベンゼンの合成（下記反応式）について、以下の(i)～(v)の質問に答えよ。



アニリン　　　　4-ヒドロキシアゾベンゼン

(i) 4-ヒドロキシアゾベンゼンには2つの異性体が存在する。それぞれ立体構造がわかるように構造を示せ。

(ii) 化合物 X の構造式を記せ。

(iii) アニリンから化合物 X ができる反応では、ニトロソニウムイオン（NO^+）が活性種としてアニリンと反応する。ニトロソニウムイオンの構造をルイス式で示せ。

(iv) アニリンとニトロソニウムイオンの反応の反応機構を詳しく記せ。

(v) 化合物 X から 4-ヒドロキシアゾベンゼンができる反応機構を詳しく記せ。

4 生物化学

1 (i)~(v) の各文章が正しければ○、誤っている場合には×を付け、いずれの場合でもその判断の理由を 2-3 行で説明せよ。

(i) カルボキシメチルセルロースカラムを用いるイオン交換クロマトグラフィーでは、3 種類のアミノ酸: His、Leu、Arg は、pH 6 においてこの順序で溶出されてくる。(pK_1、pK_2、pK_R はそれぞれ Arg:1.8、9.0、12.5、His:1.8、9.3、6.0、Leu:2.3、9.7、無し とする)

(ii) ホスホフルクトキナーゼは、ATP からフルクトース 6-リン酸にリン酸基を転移する。この酵素は質量作用の法則による調節のみを受け、ATP 濃度が高いと触媒活性が低下する。

(iii) 真核細胞において、酸素が無い条件下では、解糖系で糖から取り出した電子とプロトンは細胞質で行われる発酵に使われる。発酵段階の代表的な生成物は ATP である。一方、酸素がある条件では、解糖系とクエン酸回路から得られた電子は、ミトコンドリア内に運ばれ、内膜にある一連の酸化還元中心を通り、マトリックスで H^+と酸素を還元して水だけを生じる。

(iv) XとYはどちらも 1 kb の二本鎖 DNA であり、アデニン含量がそれぞれ 20%と 30%である。同一条件下でXとYの Tm (融解温度)を測定すると、X の方が高い。

(v) DNA ポリメラーゼと RNA ポリメラーゼはどちらも、鋳型 DNA と、プライマーとして鋳型鎖の 3' 末端に相補的な短いポリデオキシリボヌクレオチドを必要とする。

2 生体内糖質 A, B について答えよ。A は植物細胞壁の主成分で、地球上で最も豊富に存在し、繊維原料として広く利用されている。B はエビやカニなどの殻、昆虫や菌類の細胞壁などに含まれ、地球上での生産量は A についで多い。B を濃アルカリで加水分解すると脱アセチル化されて抗菌性をもつキトサンが得られる。キトサンは水に溶解しないが、その酢酸塩などは水に溶解してカチオン性を示す。

1) A、B の名称およびそれぞれの単量体の名称を答えよ。

2) A、B およびキトサンなどを総称して何というか。またこれらにおいて単量体をつなぐ結合を何と呼ぶか。

3 次の語から<u>2語を選び</u>、<u>3—5 行で</u>、<u>構造、機能、性質等を説明せよ</u>。図も用いても良い。

翻訳後修飾、　光化学系、　複合糖質、　iPS 細胞、　オートファジー

5 分析化学

（1） 5.0 mmol の鉄 (II) の塩を含む 50 mL の硫酸溶液を、0.10 mol/L の硫酸セリウム (IV) 溶液で滴定した。(i)〜(v)の時点の溶液中の白金電極の電位を、次のネルンストの式を用いて計算せよ。またこの結果をもとに滴定曲線を描け。ただし、硫酸溶液中の $Fe^{2+/3+}$のみかけの電位を+0.68 V、$Ce^{3+/4+}$のみかけの電位を+1.44 V とし、log 2 = 0.30、log 5 = 0.70 とする。

$A + ne^- \rightleftarrows A^{n-}$のときの電極電位 E： $E = E^0 - 0.059/n \log \{[A^{n-}]/[A]\}$

（E^0 はみかけの電位）

(i) 滴定の出発点（ここでは、鉄（II）と鉄（III）のイオン比を 1000 : 1 とする）
(ii) 10 mL の硫酸セリウム（IV）溶液を加えた時点
(iii) 40 mL の硫酸セリウム（IV）溶液を加えた時点
(iv) 当量点
(v) 60 mL の硫酸セリウム（IV）溶液を加えた時点

（2） 以下の語句 (i)～(iv) について、それぞれ 80～150 文字程度で説明せよ。
(i) 系統誤差と偶然誤差
(ii) アレニウスの酸と塩基およびブレンステッドの酸と塩基
(iii) 上昇型ペーパークロマトグラフィー
(iv) 定電位電解還元

平成30年度　お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科（博士前期課程）

理学　専攻・　情報科学　コース

一　般　入　試

基　礎　科　目　試　験

試　験　日：　平成 30年 2月5日(月)

試 験 時 間：　9時 30分 ～ 12時 00分

【注意事項】

1. 監督者の「始め」の合図があるまで問題冊子を開けないこと。

2. 試験中、用のある場合は手を挙げて監督者を呼ぶこと。

3. 問題にはすべて解答すること。

数 学 基 礎

【問題1】

【1】 $f(x) = \sin^{n-1} x \cos x$とする．このとき以下の各問に答えよ．ただし$n$は正の整数である．

(1) $\dfrac{df}{dx}$を求めよ．

(2) $\dfrac{df}{dx} = a\sin^n x + b\sin^{n-2} x$としたとき定数$a$と$b$を求めよ．

(3) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$と置く．$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{dx} dx$を計算することによって，

$nI_n = (n-1)I_{n-2}$が成立することを示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$を求めよ．

【2】 2変数関数$g(x,y) = e^{-xy}$について以下の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$と$\dfrac{\partial g}{\partial y}$を求めよ．

(2) 関数$g(x,y)$が条件$x^2+y^2=1$のもとで極値を取る候補点を求めよ．

【問題2】

【1】 $f: V \to V$ を線形空間 V から V への線形写像とする．また，$v \in V$ を $f^k(v) = \mathbf{0}, f^{k-1}(v) \neq \mathbf{0}$ を満たすベクトルとする．ただし，k はある自然数であり，$f^n(v)$ は v に写像 f を n 回作用させたものである．次の各項目を示せ．

(1) k 個のベクトル $v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)$ は線形独立である．

(2) k 個のベクトル $v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)$ が生成する部分空間を W，W の任意の要素を w とする．このとき，$f(w) \in W$ である．

(3) W の任意の要素 w に対して，$f^k(w) = \mathbf{0}$ である．

【2】 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，$P \subset \mathbb{R}^3$ を $x - y - 2z = 0$ によって表される平面，$L \subset \mathbb{R}^3$ を $\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$ によって表される直線であるとする．以下の各問に答えよ．

(1) 点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L$ の P への正射影 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) 点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$ の L への正射影 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ を求めよ．

情 報 基 礎

【問題1】 以下のそれぞれの言明の正誤を，理由とともに答えよ．

(1) X, Y が空集合のとき，X から Y への写像は存在しない．

(2) X が空集合であり，X から Y への写像が存在するとき，Y は空集合である．

(3) 一階命題論理の論理式からなる集合は有限集合である．

(4) $\models$ は意味論的推論として妥当ではない．

(5) $\phi_1, \ldots, \phi_n$ が一階命題論理の論理式であるとき，$\phi_1, \ldots, \phi_n \models$ ならば，$\phi_1, \ldots, \phi_n$ のうち少なくとも一つは矛盾式である．

(6) ϕ, ψ が一階命題論理の論理式であるとき，$\models \phi \to \psi$ と $\phi \models \psi$ は同等である．

(7) ϕ, ψ, χ が一階命題論理の論理式であるとき，$\phi \to \psi,\ \chi \vee \neg\phi \ \models\ \neg\phi \wedge \chi$ が成立する．

(8) 一階命題論理の論理式には，恒真式であるか否かを有限ステップの計算で判定することができない式が存在する．これを不完全性定理という．

【問題 2】

以下の構造体で表されている各ノードにより構成された二分探索木の C 言語プログラムを考える.

```
struct node {
  char data[20];
  struct node *left, *right;
};
```

各ノードの要素データは配列 data[] に格納され, 自分より小さな要素データを持つ子ノードへのポインタを*left, 大きな要素データを持つ子ノードへのポインタを*right とする.

以下の 7 つのノード A, B, C, D, E, F, H を持つ二分探索木 T において, 各ノードの要素データは以下の通りであるとする.

```
struct node A, B, C, D, E, F, H;
strcpy(A.data, "Apple"), strcpy(B.data, "Banana"), strcpy(C.data, "Coconut"),
strcpy(D.data, "Durian"), strcpy(E.data, "Elderberry"), strcpy(F.data, "Fig"),
strcpy(H.data, "Hackberry");
```

T の各ノード間の関係は以下の通りであるとする.

```
D.left=&B, D.right=&F, B.left=&A, B.right=&C, F.left=&E, F.right=&H;
```

この T において, 要素データ buf の探索を行うプログラムを次ページに示す. プログラムの左側の数字は行番号である. このプログラムは, buf と同じ要素データが見つかった場合はその構造体へのポインタを返し, 見つからなかった場合は NULL を返す.

ただし root と nil はそれぞれ以下の通りである.

```
struct node *root, nil;
```

root は木の根を指すポインタで, A〜H のうち根となったノードを指している. 一方, nil は木の末端であることを示す構造体で, 各葉 (leaf) から子ノードとして指されている.

```
1  struct node *search(char buf[]) {
2    struct node *ptr;
3    int cmp;
4
5    strcpy(nil.data, buf);
6    ptr = root;
7    while ((cmp = strcmp(buf, ptr->data)) != 0) {
8      if (cmp < 0) ptr = ptr->left;
9      else         ptr = ptr->right;
10   }
11   if (ptr != &nil) return ptr;
12   else             return NULL;
13 }
```

以下の問いに答えよ.

1. T はどのような構造となっているか，A～H のノードを用いて図示せよ.
2. プログラムの 5 行目で，探索する要素データ buf を構造体 `nil` の要素データにコピーしている理由を答えよ．またそのような目的で用いられる構造体 `nil` は何と呼ばれるか答えよ.
3. T に対し，上記のプログラムで要素データ Coconut の探索を行うとプログラムはどのように動作するか，プログラム中で実行される行番号を実行順に書き下し，各行の動作を順に説明せよ.
4. T に対し，上記のプログラムで要素データ Grape の探索を行うとプログラムはどのように動作するか，プログラム中で実行される行番号を実行順に書き下し，各行の動作を順に説明せよ.